

Calcul d'une limite au voisinage de l'infini

Comment calculer la limite en l'infini d'une fonction polynôme :

Pour étudier la limite en l'infini d'une fonction polynôme :

- * on essaie d'abord d'utiliser les règles opératoires sur les limites
- * si on obtient un cas d'indétermination, on met en facteur la plus grande puissance de x .

ex : calculer les limites aux bornes de la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 + 5x$

$$* \text{ limite en } +\infty : \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 5x = +\infty \end{array} \right\} \text{ donc par somme: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$* \text{ limite en } -\infty : f(x) = 3x^2 + 5x = x^2 \left(3 + \frac{5}{x} \right)$$

On a une forme indéterminée du type $\infty - \infty$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 + \frac{5}{x} \right) = 3 \end{array} \right\} \text{ donc par produit: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Comment calculer la limite en l'infini d'une fonction rationnelle :

Pour trouver la limite en l'infini d'une fonction rationnelle, dans un cas d'indétermination, on met en facteur la plus grande puissance de x du numérateur, ainsi que celle du dénominateur. Ensuite, on simplifie le quotient, et on calcule séparément la limite du numérateur et du dénominateur, avant de conclure pour le quotient.

ex : limite en $+\infty$ de $f: x \mapsto \frac{x+1}{x^2-x}$

On a une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-x} = \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} \text{ après simplification par } x.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

donc par produit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

donc par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$