

corrigé du devoir

Exercice 1

f est la fonction définie sur $]4; +\infty[$ par $f(x) = -2x + 1 - \frac{8}{x-4}$

Une autre expression de $f(x)$ est : **b)** $f(x) = \frac{2x^2 - 9x + 12}{4-x}$.

En effet, $f(x) = -2x + 1 - \frac{8}{x-4} = \frac{(-2x+1)(x-4) - 8}{x-4} = \frac{-2x^2 + 8x + x - 4}{x-4} = \frac{-2x^2 + 9x - 12}{x-4}$

Soit f' la dérivée de f . On a : **c)** $f'(x) = \frac{-2x^2 + 16x - 24}{(x-4)^2}$

En effet, $f'(x) = -2 + \frac{8}{(x-4)^2} = \frac{-2(x-4)^2 + 8}{(x-4)^2} = \frac{-2(x^2 - 8x + 16) + 8}{(x-4)^2} = \frac{-2x^2 + 16x - 24}{(x-4)^2}$

La courbe Γ de f admet pour asymptote : **b)** La droite d'équation $x=4$

Puisque quand x tend vers 4, $f(x)$ tend vers $+\infty$.

La droite d'équation $y = -2x + 1$ est : **b)** Asymptote à Γ

Puisque quand x tend vers l'infini, $f(x) - (-2x + 1) = -\frac{8}{x-4}$ tend vers 0.

Exercice 2

Soit l'équation (E) $\frac{1}{x} = x - 2$ où l'inconnue x est un réel appartenant à $]0; +\infty[$.

La droite d'équation $y = x - 2$ et l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ semblent avoir un et un seul point d'intersection sur l'intervalle $]0; +\infty[$, l'équation (E) semble donc avoir une et une seule solution.

Si l'on pose $g(x) = x - 2 - \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$:

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = -\infty$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

$g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$ est strictement positif comme somme de deux réels strictement positifs, g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

La fonction g est une fraction rationnelle, elle est donc continue sur $]0; +\infty[$, et on vient de voir qu'elle est strictement croissante sur cet intervalle. De plus, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, et 0

appartient à l'intervalle $]-\infty; +\infty[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0; +\infty[$, et cette équation s'écrit $x - 2 - \frac{1}{x} = 0$, ce qui est bien

équivalent à (E) : $\frac{1}{x} = x - 2$.

On trouve à la calculatrice, par une méthode de balayage, que cette solution appartient à l'intervalle $]2,41; 2,42[$.

Algébriquement : $\frac{1}{x} = x - 2 \Leftrightarrow x - 2 - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x - 1}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$.

$\Delta = 2^2 + 4 = 8$, il y a deux solutions $x_1 = \frac{2 - \sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2}$, et $x_2 = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$. Seul x_2 appartient à l'intervalle $]0; +\infty[$, c'est l'unique solution de (E).

Exercice 3

Le point de la courbe d'abscisse 0 a pour ordonnée $\frac{3}{2}$, donc $f(0) = \frac{3}{2}$.

Le point de la courbe d'abscisse 1 a pour ordonnée 2, donc $f(1) = 2$.

En son point d'abscisse 0, la courbe admet pour tangente la droite d'équation $y = x + \frac{3}{2}$, qui a pour coefficient directeur 1. On en conclut que $f'(0) = 1$.

En son point d'abscisse 1, la courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses, donc de coefficient directeur 0, donc $f'(1) = 0$.

On sait que $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+4}$, donc $f(0) = \frac{a \times 0 + b}{0^2 + 4} = \frac{b}{4}$, donc $\frac{b}{4} = \frac{3}{2}$ et $b = 6$.

De plus, $f(1) = \frac{a \times 1 + b}{1^2 + 4} = \frac{a+b}{5}$ donc $\frac{a+b}{5} = 2$, soit $a+b = 10$ et $a = 4$.

Finalement $f(x) = \frac{4x+6}{x^2+4}$.

A l'infini, f est un quotient rationnel, il se comporte comme le quotient de ses termes de plus haut degré, donc comme $\frac{4x}{x^2} = \frac{4}{x}$. Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0$, on peut en conclure que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. L'axe des abscisses est asymptote à la courbe de f .

La dérivée de f vaut $f'(x) = \frac{4(x^2+4) - 2x(4x+6)}{(x^2+4)^2} = \frac{-4x^2 - 12x + 16}{(x^2+4)^2} = \frac{4(-x^2 - 3x + 4)}{(x^2+4)^2}$, elle est du signe de $-x^2 - 3x + 4$. $\Delta = 3^2 + 4 \times 4 = 25$, il y a deux racines 1 et -4 , et le trinôme est négatif à l'extérieur puisque le coefficient de x^2 est négatif. On a finalement :

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$	$-$
$f(x)$	0	$-\frac{1}{2}$	2	0

On appelle g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+f(x)}}$. On a une fonction composée,

$$x \rightarrow 1+f(x) = t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1+f(x) = 1$, et $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{t}} = 1$. On a donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$. De même,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1+f(x) = 1$ et $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{t}} = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$.

La dérivée de la fonction $1+f$ est aussi f' . La dérivée de la fonction $u : t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{t}}$ est donnée par

$$u'(t) = \frac{1}{(\sqrt{t})^2} = \frac{-1}{2t\sqrt{t}}$$

D'après le théorème sur la dérivée d'une composée, on a

$$g'(x) = f'(x) \times u'(1+f(x)) = \frac{-4x^2 - 12x + 16}{(x^2+4)^2} \times \frac{-1}{2(1+f(x))\sqrt{1+f(x)}}$$