

2.

a) Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{4}x - 1$. Etudier les variations de g , en déduire que $g(x) \leq 0$ pour tout x de $[0; +\infty[$, puis que C est en dessous de T.

Pour $x > 0$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{4} = \frac{2 - \sqrt{x}}{4\sqrt{x}}$. Comme $4\sqrt{x}$ est toujours positif, $g'(x)$ a le même signe que $2 - \sqrt{x}$, c'est à dire positif pour $x \leq 4$ et négatif pour $x \geq 4$.

On obtient le tableau de variation suivant :

x	0	4	$+\infty$
$g'(x)$		0	
$g(x)$		0	

La fonction g a un maximum pour $x = 4$. Comme $g(4) = \sqrt{4} - \frac{1}{4} \times 4 - 1 = 0$, on a donc

$g(x) \leq 0$ pour tout x . On en déduit que $\sqrt{x} - \frac{1}{4}x - 1 \leq 0$, soit $\sqrt{x} \leq \frac{1}{4}x + 1$. La courbe C d'équation $y = \sqrt{x}$ est donc en dessous de la droite T d'équation $y = \frac{1}{4}x + 1$.

b) Développer $\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right)^2$. Utiliser le résultat obtenu pour montrer que C est en dessous de T.

$\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right)^2 = \frac{x}{4} - \sqrt{x} + 1$. Comme un carré est toujours positif, $\frac{x}{4} - \sqrt{x} + 1 \geq 0$, donc

$\sqrt{x} \leq \frac{1}{4}x + 1$. On retrouve bien que la courbe C d'équation $y = \sqrt{x}$ est en dessous de la droite T d'équation $y = \frac{1}{4}x + 1$.