exemple 1 :

Soit la fonction f définie sur $D = \mathbb{R}$ / {- 1 ; 1} par $f(x)=\dfrac{x^3-3x-4}{x^2-1}$.

Déterminer les réels *a*, b et *c* tels que, pour tout $x\in D$,on ait : $f(x)=ax+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{x-1}$

résolution :

pour tout $x\in D$:

$$f(x)=ax+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-1} \quad \Leftrightarrow \quad f(x)=\frac{ax(x^2-1)+b(x-1)+c(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^3-3x-4}{x^2-1}=\frac{ax^3+x(-a+b+c)+(c-b)}{x^2-1}$$

Par identification des coefficients, cela équivaut au système suivant :

$$\begin{cases} a=1 \\ -a+b+c=-3 \\ c-b=-4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=-3 \end{cases}$$

Donc pour tout $x\in D$: $f(x)=x+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x-1}$

exemple 2 :

Soit la fonction f définie sur $D = \mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+3x-4$.

Déterminer les réels *a*, *b* et *c* tels que, pour tout $x\in D$,on ait :

$$f(x)=(x-1)\left(ax^2+bx+c\right)$$

résolution :

$$\begin{aligned}(x-1)\left(ax^2+bx+c\right)&=ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c\\&=ax^3+x^2(b-a)+x(c-b)-c\end{aligned}$$

D'où : $f(x)=(x-1)\left(ax^2+bx+c\right) \quad \Leftrightarrow \quad x^3+3x-4=ax^3+x^2(b-a)+x(c-b)-c$

Par identification des coefficients on a : $\begin{cases} a=1 \\ b-a=0 \\ c-b=3 \\ -c=-4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=4 \end{cases}$

Finalement : $f(x)=(x-1)\left(x^2+x+4\right)$