

Exercice n°3

Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 3]$ par $f(x) = 2 + \sqrt{3-x}$ et g la fonction définie sur $[2; +\infty[$ par $g(x) = -x^2 + 4x - 1$

1) Pour tout $x \in [2; +\infty[$,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2 + \sqrt{3 - g(x)} = 2 + \sqrt{3 - (-x^2 + 4x - 1)} = 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2 + \sqrt{(x-2)^2} = 2 + |x-2|$$

Mais puisque $x \in [2; +\infty[$, $x \geq 2 \Leftrightarrow x-2 \geq 0$ donc $|x-2| = x-2$, et ainsi $(f \circ g)(x) = 2 + |x-2| = 2 + x - 2 = x$

2) Pour tout $x \in]-\infty; 3]$,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = -(f(x))^2 + 4f(x) - 1$$

$$= -(2 + \sqrt{3-x})^2 + 4(2 + \sqrt{3-x}) - 1$$

$$= -\left(4 + 4\sqrt{3-x} + (\sqrt{3-x})^2\right) + 8 + 4\sqrt{3-x} - 1$$

$$= -4 - 4\sqrt{3-x} - (3-x) + 8 + 4\sqrt{3-x} - 1 = -4 - (3-x) + 8 - 1 = x$$

3) Puisque les deux ensembles de définitions de $g \circ f$ et $f \circ g$ sont différents, on ne peut pas conclure que $g \circ f = f \circ g$.

En revanche, pour tout $x \in [2; 3]$, $g \circ f(x) = f \circ g(x)$

Exercice n°4

Soit f et g deux fonctions définies sur \mathbb{R} par $f(x) = 3x - 5$ et $g(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1}$.

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2x^2 + 1 \geq x^2 + 1 > 0$, donc $\frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1} \geq 1$, et $2x^2 + 1 < 2x^2 + 2 \Leftrightarrow \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1} < \frac{2x^2 + 2}{x^2 + 1}$, donc $g(x) < 2$.

2) Pour tout réel x , $f(x) \in \mathbb{R}$, donc d'après la question 1), on aura $1 \leq \frac{2f(x)^2 + 1}{f(x)^2 + 1} < 2$, c'est-à-dire $1 \leq (g \circ f)(x) < 2$

3) Pour tout réel x , $1 \leq g(x) < 2$. Puisque f est strictement croissante sur \mathbb{R} , on peut donc écrire que pour tout réel x , $f(1) \leq f(g(x)) < f(2)$, c'est-à-dire $-2 \leq (f \circ g)(x) < 1$

Exercice n°5 Sur le graphique, on « lit » que f est strictement croissante sur $[-4; -2]$, strictement décroissante sur $[-2; 2]$ et enfin strictement croissante sur $[-2; 6]$. Enfin, on lit que g est strictement croissante sur $[-4; 4]$ et strictement décroissante sur $[4; 6]$.

Sur l'intervalle $[-4; -2]$, f est strictement croissante, et pour tout $x \in [-4; -2]$, $f(x) \in [2; 4]$, intervalle sur lequel g est strictement croissante. La composée $g \circ f$ sera donc strictement croissante sur $[-4; -2]$.

Sur l'intervalle $[-2; 2]$, f est strictement décroissante, et pour tout $x \in [-2; 2]$, $f(x) \in [-2; 4]$, intervalle sur lequel g est strictement croissante. La composée $g \circ f$ sera donc strictement décroissante sur $[-2; 2]$.

Sur l'intervalle $[2; 4]$, f est strictement croissante, et pour tout $x \in [2; 4]$, $f(x) \in [-2; 0]$, intervalle sur lequel g est strictement croissante. La composée $g \circ f$ sera donc strictement croissante sur $[2; 4]$.

Sur l'intervalle $[4; 6]$, f est strictement croissante, et pour tout $x \in [4; 6]$, $f(x) \in [0; 4]$, intervalle sur lequel g est strictement croissante. La composée $g \circ f$ sera donc strictement croissante sur $[4; 6]$.

Exercice n°6

1) Soit $x \in I =]-\infty; 0]$, alors $x \leq 0 \Rightarrow x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 4 \geq 4$, c'est-à-dire $f(x) \in [4; +\infty[$. On conclut donc que $f(I) = [4; +\infty[$

2) Soit $x \in J = [5; +\infty[$, alors $x \leq 5 \Rightarrow x - 4 \leq 1$, c'est-à-dire $g(x) \in]-\infty; 1]$. On conclut donc que $g(J) =]-\infty; 1]$