5 Corrigés des exercices et problèmes

Exercices d'application

1 - • Les coordonnées du point M sont :
$(\vec{i}\,.\overrightarrow{OM}\,;\,\vec{j}\,.\overrightarrow{OM})$ c'est-à-dire $(2\,;-3)$.
• Les coordonnées du point N sont :
$(\vec{i}\,.\overrightarrow{ON}\,;\,\vec{j}\,.\overrightarrow{ON})$ c'est-à-dire $(-1\,;1)$.

2 - Les coordonnées de $\vec{P}$ sont $(\vec{i}\,.\overrightarrow{AP}\,;\,\vec{j}\,.\overrightarrow{AP})$
or $(\vec{P}, \vec{i}) = \dfrac{\pi}{3}$ donc $\vec{i}\,.\overrightarrow{AP} = 1 \times 1{,}20 \times \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 0{,}6$
et $(\vec{P}, \vec{j}) = (\vec{P}, \vec{i}) + (\vec{i}, \vec{j}) = \dfrac{5\pi}{6}$
donc $\vec{j}\,.\vec{P} = 1 \times 1{,}20 \times \cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = -0{,}6\sqrt{3}$

3 - a) Une équation de d est $x + 2y + c = 0$
et $5 - 4 + c = 0$ car $A \in d$
d'où $c = -1$ et on obtient $x + 2y - 1 = 0$.
b) Une équation de d est $-2x + 3y + c = 0$
$A \in d$ donc $-12 + 3 + c = 0$;
$c = 9$, on obtient $-2x + 3y + 9 = 0$.
c) Une équation de d est $\sqrt{2}x + y + c = 0$
$A \in d$ donc $\sqrt{2} + c = 0$; $c = -\sqrt{2}$
on obtient $\sqrt{2}x + y - \sqrt{2} = 0$.
d) Une équation de d est $-2x + \sqrt{3}y = 0$.

4 - La médiatrice de [AB] est la droite qui passe par le milieu I de [AB] et dont $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal.
$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-1\,;5)$, donc une équation de cette droite est $-x + 5y + c = 0$.
Elle passe par $I\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ donc $-\dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{2} + c = 0$ et $c = -1$.
Une équation de la médiatrice est : $-x + 5y - 1 = 0$.

5 - a) $\overrightarrow{AB}(-3\,;1)$.
Notons I le milieu de [AB] : $I\left(\dfrac{7}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$.
La médiatrice de [AB] est la droite passant par I dont $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal. Une équation de cette droite est $-3x + y + c = 0$.
Elle passe pour I donc $-3 \times \dfrac{7}{2} - \dfrac{3}{2} + c = 0 \quad c = 12$,
on obtient $-3x + y + 12 = 0$.
b) $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à la hauteur issue de C du triangle ABC donc une équation de cette hauteur est $-3x + y + c' = 0$.
C est un point de cette droite donc :
$$-3 \times 1 + 3 + c' = 0 \text{ d'où } c' = 0$$
$$-3x + y = 0$$
$y = 3x$ est une équation de cette hauteur.

6 - a) $\overrightarrow{BC}(-6\,;-2)$.
Une équation de la hauteur issue de A est $-6x - 2y + c = 0$.
Cette hauteur passe par A donc :
$$-6 \times 1 - 2 \times (-2) + c = 0$$
$$-2 + c = 0 \quad \text{d'où} \quad c = 2.$$
On obtient $-6x - 2y + 2 = 0$ soit $-3x - y + 1 = 0$.
b) $\overrightarrow{AC}(-3\,;3)$
Une équation de la hauteur issue de B est :
$$-3x + 3y + c = 0.$$
Cette hauteur passe par B donc :
$-3 \times 4 + 3 \times 3 + c = 0$ d'où $c = 3$,
on obtient $-3y + 3y + 3 = 0$ soit $-x + y + 1 = 0$.
c) H est le point d'intersection des hauteurs donc ses coordonnées vérifient :
$$\begin{cases} -3x_H - y_H + 1 = 0 \\ -x_H + y_H + 1 = 0 \end{cases} \text{ d'où } -4x_H = -2\,; \begin{cases} x_H = \dfrac{1}{2} \\ y_H = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

7 - a) L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 0$ est la droite passant par A et dont $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal.
b) $\overrightarrow{AM}(x+1\,;y-1)$, $\overrightarrow{AB}(4\,;-2)$
$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 0$ équivaut à :
$$4(x+1) - 2(y-1) = 0$$
$$4x - 2y + 4 + 2 = 0.$$
Une équation de cette droite est : $2x - y + 3 = 0$.

8 - Dire que M est un point de cette tangente équivaut à dire que $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AB} = 0$.
$$\overrightarrow{BM}(x-6\,;y+2)\,;\ \overrightarrow{AB}(4\,;-4)$$
$$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AB} = -4(x-6) - 4(y+2)$$
$$= x - 6 - y - 2.$$
Une équation de T est $x - y - 8 = 0$.

9 - a) $\vec{n}(2\,;-3)$ est un vecteur normal à d ; $A(-2\,;0)$ est un point de d.
b) $\vec{n}(5\,;-1)$ est un vecteur normal à d ; $A(1\,;3)$ est un point de d.
c) $\vec{n}(\sqrt{2}\,;-1)$ est un vecteur normal à d ; $A(0\,;1)$ est un point de d.

10 - a) $\overrightarrow{n_1}(2\,;-1) \quad \overrightarrow{n_2}\left(\dfrac{1}{2};1\right) \quad \overrightarrow{n_3}(2\,;4)$.
b) $\overrightarrow{n_1}\,.\,\overrightarrow{n_2} = 2 \times \dfrac{1}{2} + -1 \times 1 = 0$.
c) $\overrightarrow{n_3} = 4\overrightarrow{n_2}$
$\overrightarrow{n_3}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont deux vecteurs colinéaires.
d) $d_1 \perp d_2$ car $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont orthogonaux.
$d_2 /\!/ d_3$ car $\overrightarrow{n_2}$ et $\overrightarrow{n_3}$ sont colinéaires d'où $d_2 \perp d_3$.

11 - a) $(x+1)^2+(y-2)^2 = 9$ est une équation de $\mathscr{C}$.

b) $\overrightarrow{AB}\,(-2;2)$ donc $AB = \sqrt{8}$

$(x-4)^2+(y-1)^2 = 8$ est une équation de $\mathscr{C}$.

c) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

$(x-2)(x-4)+(y-1)(y+1) = 0$

$x^2-6x+8+y^2-1 = 0$

$x^2-6x+y^2+7 = 0$ est une équation de $\mathscr{C}$.

12 - a) Une équation de $\mathscr{C}$ est : $(x-2)^2+(y+4)^2 = 9$.

b) $x^2-10x = (x-5)^2-25$ et $y^2+4y = (y+2)^2-4$.

L'équation de E s'écrit :

$(x-5)^2-25+(y+2)^2-4+23 = 0$,

c'est-à-dire $(x-5)^2+(y+2)^2 = 6$.

Donc E est le cercle de centre $B\,(5;-2)$ et de rayon $\sqrt{6}$.

13 - a) $(x+3)^2-9+(y-1)^2-1+1 = 0$

$(x+3)^2+(y-1)^2 = 9$

est l'équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega\,(-3;1)$ de rayon 3.

b) $(x-3)^2-9+(y-3)^2-9+18 = 0$

$(x-3)^2+(y-3)^2 = 0$

est l'équation d'un cercle $\mathscr{C}$ réduit à un point.

Centre $\Omega\,(3;3)$ rayon 0.

c) $x^2+4x+y^2+2y+6 = 0$

$(x+2)^2-4+(y+1)^2-1+6 = 0$

$(x+2)^2+(y+1)^2 = \underbrace{-1}_{<0}$ n'est pas l'équation d'un cercle.

14 - a) $\overrightarrow{AB}\,(-1;2)$ $\quad AB^2 = 5$

$\overrightarrow{BC}\,(3;-1)$ $\quad BC^2 = 10$

$\overrightarrow{CA}\,(-2;-1)$ $\quad CA^2 = 5$

$AB^2+AC^2 = BC^2$ et $AB = AC$

donc le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.

b) Le centre de ce cercle est le milieu I de [BC], hypoténuse du triangle ABC.

$I\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Son rayon est $\frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

Son équation est : $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$.

c) La médiatrice de [BC] est la droite passant par I et de vecteur normal $\overrightarrow{BC}$ donc son équation est :

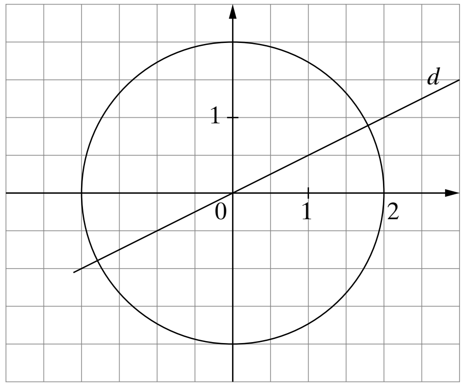
$3x-y+c = 0$ et $-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+c = 0$

donc $c = 2$ d'où son équation est : $3x-y+2 = 0$.

15 - a) L'ensemble des points M est l'intérieur du cercle de centre $I\,(4;-3)$ et de rayon 1 ; le cercle étant compris.

b) L'ensemble des points M est l'extérieur du cercle de centre $I\,(-5;1)$ et de rayon 2 ; le cercle n'étant pas compris.

16 - a)



b) Les coordonnées des points d'intersection vérifient :

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 4 \\ y = \dfrac{x}{2} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad x^2+\frac{x^2}{4} = 4$$

$$5x^2 = 16$$

$$x^2 = \frac{16}{5}$$

donc $x = \frac{4}{\sqrt{5}}$ ou $x = -\frac{4}{\sqrt{5}}$.

$$\begin{cases} x = \dfrac{4\sqrt{5}}{5} \\ y = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{4\sqrt{5}}{5} \\ y = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Les points d'intersection sont :

$$M_1\left(\frac{4\sqrt{5}}{5};\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \quad \text{et} \quad M_2\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5};-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right).$$

17 - Une équation de $\mathscr{C}$ est :

$$(x-1)^2+(y-1)^2 = 4.$$

Les coordonnées des points M appartenant à $\mathscr{C}$ et à d vérifient :

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2 = 4 \\ y = 1+\sqrt{3}-x \end{cases}$$

d'où $(x-1)^2+(\sqrt{3}-x)^2 = 4$

$x^2-2x+1+3-2\sqrt{3}x+x^2-4 = 0$

$2x^2-2(1+\sqrt{3})x = 0$

$x(x-(1+\sqrt{3})) = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1+\sqrt{3} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 1+\sqrt{3} \\ y = 0 \end{cases}$$

Les coordonnées des points d'intersection sont :

$$(0;1+\sqrt{3}) \text{ et } (1+\sqrt{3};0).$$

18 - a) $\mathscr{C}_1$ a pour équation $(x+3)^2+(y+3)^2 = 25$

ou $x^2+y^2+6x+6y-7 = 0$.

$\mathscr{C}_2$ a pour équation $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2 = \frac{25}{4}$

ou $x^2+y^2+x-4y-2 = 0$.

b) Les coordonnées des points d'intersection vérifient :

$$\begin{cases} x^2+y^2+6x+6y-7 = 0 & \textbf{(1)} \\ x^2+y^2+x-4y-2 = 0 & \textbf{(2)} \end{cases}$$

Ce système est équivalent au système :

$$\begin{cases} 5x+10y-5 = 0 & (1)-(2) \\ x^2+y^2+x-4y-2 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2y+1 \\ (-2y+1)^2+y^2-2y+1-4y-2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2y+1 \\ 5y^2-10y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2y+1 \\ 5y(y-2) = 0 \end{cases}$$

Les points d'intersection sont : $I(1;0)$ et $J(-3;2)$

42 - a) $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

b) $\frac{11\pi}{12} = \pi-\frac{\pi}{12}$

donc $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

43 - $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)$

$$= \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

44 - a) $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \cos(x)\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin(x)\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(x)-\sin(x))$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sin(x)\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin(x)+\cos(x)).$$

b) $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \cos(x)\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin(x)\times\frac{1}{2}$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \sin(x)\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cos(x).$$

45 - a) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(x)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(x) = 0+1\times\sin(x) = \sin(x).$

b) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(x)-\sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)-0 = \cos(x).$

46 - $\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) = \sin(x)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos(x) = \sin(x)\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)$

$$\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right) = \sin(x)\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\cos(x) = -\frac{1}{2}\sin(x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)$$

d'où $\sin(x)+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)$

$$= \sin(x)-\frac{1}{2}\sin(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)-\frac{1}{2}\sin(x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) = 0.$$

47 - a) $\cos(x+y)\times\cos(x-y) =$

$$(\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y))(\cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y))$$
$$= \cos^2(x)\cos^2(y)-\sin^2(x)\sin^2(y)$$
$$= \cos^2(x)(1-\sin^2(y))-\sin^2(x)\sin^2(y)$$
$$= \cos^2(x)-(\cos^2(x)+\sin^2(x))(\sin)^2(y)$$
$$= \cos^2(x)-\sin^2(y)$$

On obtient aussi

$$\cos^2(x)-\sin^2(y) = 1-\sin^2(x)-(1-\cos^2(y)) = \cos^2(y)-\sin^2(x).$$

b) $\sin(x+y)\times\sin(x-y) =$

$$(\sin(x)\cos(y)+\sin(y)\cos(x))(\sin(x)\cos(y)-\sin(y)\cos(x))$$
$$= \sin^2(x)\cos^2(y)-\sin^2(y)\cos^2(x)$$
$$= \sin^2(x)(1-\sin^2(y))-\sin^2(y)(1-\sin^2(x))$$
$$= \sin^2(x)-\sin^2(x)\sin^2(y)-\sin^2(y)+\sin^2 y\sin^2 x$$
$$= \sin^2 x-\sin^2 y.$$

On obtient aussi

$$\sin^2(x)-\sin^2(y) = 1-\cos^2(x)-(1-\cos^2(y)) = \cos^2(y)-\cos^2(x).$$

48 - a)

$\cos(x+y)\sin(x-y) =$

$$(\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y))(\sin(x)\cos(y)-\sin(y)\cos(x))$$
$$= \sin(x)\cos(x)\cos^2(y)-\sin(y)\cos(y)\cos^2(x)$$
$$-\sin(y)\cos(y)\sin^2(x)+\sin(x)\cos(y)\sin^2(y)$$
$$= \sin(x)\cos(x)-\sin(y)\cos(y)$$

d'où

$$2\cos(x+y)\sin(x-y) = 2\sin(x)\cos(x)-2\sin(y)\cos(y) = \sin(2x)-\sin(2y).$$