

Analyse des principaux risques financiers

Partie 3: Le risque de crédit

Chapitre 2: Etude des principales notions à partir du modèle CREDIT METRICS

Approche en temps continu

Catherine Bruneau

Année 2009-2010

1 Calculs usuels dans le modèle CREDIT METRICS

1.1 Input 1: système de ratings et données de probabilités de transition d'une classe de risque à l'autre

On fait l'hypothèse d'homogénéité du risque à l'intérieur de chaque classe: tous les individus (entreprises) appartenant à une classe de risque données (classe AA de rating par exemple) ont le même ensemble de probabilités de transition. Dans le cas de l'analyse de risque de Standard and Poors, on distingue 7 catégories de rating AAA AA A BBB BB B CCCC et Défaut.

Exemple tiré de Crouhy et al. (2000) Journal of Banking and Finance, n° 24, 59 – 117

Probabilités (en %)	<i>AAA</i>	<i>AA</i>	<i>A</i>	<i>BBB</i>	<i>BB</i>	<i>B</i>	<i>CCC</i>	Défaut
<i>AAA</i>	90.81	8.33	0.68	0.6	0.12	0	0	0
<i>AA</i>	0.70	90.65	7.79	0.64	0.6	0.14	0.02	0
<i>A</i>	0.09	2.27	91.05	5.22	0.74	0.26	0.10	0.06
<i>BBB</i>	0.02	0.33	5.95	86.93	5.30	1.17	1.12	0.18
<i>BB</i>	0.03	0.14	0.67	7.73	80.53	8.84	1.00	1.06
<i>B</i>	0	0.11	0.24	0.43	6.48	843.46	4.07	5.20
<i>CCC</i>	0	0	0.22	1.30	2.38	11.24	64.86	19.79

1.2 Input n° 2: Courbes de taux zéro-coupon, forward à 1 an, selon les catégories de risque

On donne les taux de rendement à 1, 2, 3, 4 ans selon les catégories de risque (de rating) et plus précisément les taux de rendement:

catégorie	année 1	année 2	année 3	année 4
AAA	3.60	4.17	4.73	5.12
AA	3.65	4.22	4.78	5.17
A	3.72	4.32	4.93	5.32
BBB	4.10	4.67	5.25	5.63
B	5.55	6.02	6.78	7.27
CCC	13.52	15.02	14.03	15.05

On remarque que, plus les catégories sont risquées, plus les rendements attendus associés sont élevés (car chargés d'une prime de risque).

On peut alors effectuer le calcul de la valeur d'une obligation notée BBB de maturité 5 ans et payant un coupon annuel de 6%:

$$V_{BBB} = \frac{6}{1.0410} + \frac{6}{(1.0467)^2} + \frac{6}{(1.0525)^3} + \frac{6}{(1.0503)^4} + \frac{6}{(1.0503)^4}$$

(cf. quatrième ligne du tableau précédent).

En ce qui concerne le défaut, on suppose que la perte n'est pas totale mais qu'il existe un taux de recouvrement estimé sur la base de données historiques. Dans les simulations, les taux de recouvrement sont souvent représentés par une loi Bêta de moyenne et d'écart-type variables selon la classe de séniorité définie par l'agence de notation.

1.3 Transformation des probabilités de transition en seuils

Les valeurs de actifs de la firme (qui émet l'obligation, c'est-à-dire contracte un emprunt) sont représentées par un mouvement brownien géométrique avec drift (Merton, 1974):

$$V_t = V_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\sqrt{t}Z_t\right)$$

où Z_t est une variable aléatoire distribuée comme une loi normale centrée réduite et μ et σ sont les paramètres associés à l'équation:

$$dV_t = \mu V_t dt + \sigma dW_t$$

et $\sqrt{t}Z_t = W_t - W_0$.

V_t suit une loi lognormale de moyenne $E(V_t) = V_0 \exp(\mu t)$.

La probabilité de défaillance est la probabilité que V_t soit en deçà d'un seuil V_{def} :

$$\begin{aligned} p_{def} &= P(V_t < V_{def}) \\ &= P\left(Z_t < \frac{\log(V_{def}/V_0) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \\ &= N(-d_2) \end{aligned}$$

où $\frac{\text{Log}(V_{def}/V_0) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}$ désigne le taux de rendement normalisé, distribué comme une loi $N(0, 1)$ dont la fonction de répartition est notée N .

d_2 est donné par:

$$d_2 = \frac{\text{Log}(V_0/V_{def}) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

La probabilité de défaillance est donnée par l'agence de notation (cf. premier tableau). On peut donc en déduire le seuil de défaillance:

$$Z_{CCC} = -d_2$$

De la même manière, on peut calculer les seuils qui décrivent les différentes classes de risque:

Z_B est tel que :

$$P(Z < Z_B) = P(\text{firme } BB \text{ devient } CCC)$$

On trouve ainsi:

$$\begin{aligned} Z_{CCC} &= -2.30 \Leftrightarrow P(\text{défaillance}) = 1.06\% \\ Z_B &= -2.04 \Leftrightarrow P(\text{firme } BB \text{ devient } CCC) = 1.00\% \\ &\Leftrightarrow P(Z_{CCC} < Z < Z_B) = 1.00\% \\ Z_{BB} &= -1.23 \Leftrightarrow P(Z_B < Z < Z_{BB}) = 8.84\% \\ &\Leftrightarrow P(\text{firme } BB \text{ devient } B) = 8.84\% \text{ etc...} \end{aligned}$$

Remarque: on aurait une autre succession de seuils (donc un autre découpage de la loi $N(0,1)$) si on prenait une autre classe de risque initiale (pas la classe BB considérée ci-dessus).

1.4 Introduction des corrélations entre rendements de différentes obligations

On suppose qu'il existe un coefficient de corrélation ρ entre les rendements de deux actifs (associés à deux firmes émettrices d'obligations corporate). La loi jointe des deux rendements (normalisés) est une loi normale bivariée (centrée, d'écart-type unitaire):

$$f(r_{BB}, r_A, \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(r_{BB}^2 + r_A^2 - 2\rho r_{BB}r_A)\right)$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} P(-1.23 &\leq r_{BB} \leq 1.37 \text{ et } -1.37 \leq r_A \leq 1.98) \\ &= \text{proba}(\text{firme } BB \text{ reste } BB \text{ et firme } A \text{ reste } A) \\ &= \int_{-1.23}^{1.37} \int_{-1.37}^{1.98} f(r_{BB}, r_A, \rho) dr_{BB} dr_A \\ &= 0.7368 \end{aligned}$$

On peut ainsi calculer 8x8=64 probabilités jointes.
L'existence de corrélations entre rendements a une incidence sur la défaillance des firmes correspondantes.

Pus précisément, on définit les variables aléatoires Def_1 et Def_2 qui suivent des lois de Bernoulli $B(p_1)$ et $B(p_2)$ de probabilités respectives p_1 et p_2 (prenant la valeur 1 en cas de défaillance, 0 sinon, pour chacune des deux firmes).

Alors, le coefficient de corrélation entre ces deux lois est égal à:

$$corr(Def_1, Def_2) = \frac{E(Def_1 Def_2) - E(Def_1)E(Def_2)}{\sqrt{Var(Def_1)Var(Def_2)}}$$

Or, pour la loi de Bernoulli, on a:

$$\begin{aligned} E(Def_1) &= E(B(p_1)) = p_1 \text{ et } Var(Def_1) = Var(B(p_1)) = p_1(1-p_1) \\ E(Def_2) &= E(B(p_2)) = p_2 \text{ et } Var(Def_2) = Var(B(p_2)) = p_2(1-p_2) \end{aligned}$$

D'où l'on déduit:

$$\begin{aligned} corr(Def_1, Def_2) &= \frac{E(Def_1 Def_2) - p_1 p_2}{\sqrt{p_1(1-p_1)}\sqrt{p_2(1-p_2)}} \\ &= Prob(r_{BB} < -d_2^1 \text{ et } r_A < -d_2^2) \\ &= \end{aligned}$$

si les deux firmes sont respectivement notées BB et A donc avec $p_1 = 0.06\%$ et $p_2 = 1.06\%$.

Pour un coefficient de corrélation de 0.20 entre les rendements, on obtient la corrélation suivante entre les défaillances:

$$\begin{aligned} corr(Def_1, Def_2) &= N(-3.24, -2.30, 0.20) \\ &= 0.000054 \end{aligned}$$

1.5 Simulation des variations de valeurs possibles d'un portefeuille sur un horizon de un an et calcul de la VaR correspondante

Les étapes de la simulation sont les suivantes:

1) On dérive les seuils correspondant aux probabilités de transition, pour chaque catégorie de risque présente dans le portefeuille

On découpe chaque distribution normale du rendement correspondant à chaque classe de risque.

2) On estime les corrélations entre les rendements des actifs de chaque couple de firmes présentes dans le portefeuille $\rho_{ik}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq n$,

3) On engendre des scénarii de rendements des actifs correspondant à leur loi jointe qui est supposée être une loi normale multivariée.

Pour les rendements normalisés et centrés de coefficients de corrélation ρ_{ik} , le vecteur r des n rendements ($r = (r_1, \dots, r_n)'$) correspondant aux n firmes en portefeuille, la loi est:

$$r = N(0, \Omega)$$

avec $\Omega = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdot & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & \cdot & & \cdot \\ 1 & & \cdot & \rho_{n-1,n} \\ \rho_{n1} & \cdot & \rho_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$

Pour simuler cette loi, (et donc générer des scenarii), on effectue une décomposition de Cholewsky de Ω^1 . Alors $\tilde{r} = \Omega^{-1/2}r$ suit une loi $N(0, 1)$ de dimension n c'est à dire la loi de n variables normales centrées réduites indépendantes.

En effet, les composantes du vecteur $\tilde{r}$ ne présentent plus de corrélations et sont donc indépendantes puisque normales et non-corrélées. Elles peuvent être simulées indépendamment les unes des autres.

Pour le tirage n° j on obtient $\tilde{r}_i^{(j)}$, $1 \leq i \leq n$. On effectue ainsi $J = 100000$ tirages par exemple.

4) Pour chaque simulation j , et chaque emprunteur i (firme en portefeuille), on regarde entre quels seuils se situe le rendement $r_i^{(j)}$ (en se référant aux seuils de la classe de risque à laquelle appartient l'emprunteur considéré en début d'année). On en déduit la classe de risque à laquelle appartient l'emprunteur en fin d'année (pour la simulation considérée).

5) On se reporte aux courbes de taux correspondant aux différentes catégories de risque et on peut déduire la valeur de toute obligation (firme) en portefeuille à la date finale(on actualise les flux futurs au taux correspondant à la courbe de risque à laquelle appartient la firme en fin d'année).

On peut alors calculer la valeur du portefeuille en fin d'année pour chaque simulation j considérée.

6) On rassemble les $J = 100000$ valeurs finales simulées du portefeuille: on obtient ainsi la distribution des valeurs possibles du portefeuille au bout d'un an.

7) On peut calculer le fractile (< 0) à 1% correspondant à cette distribution. Ce fractile est la Value-at-Risk (VaR) à 1 an et à 1%:

$$\text{Proba}(V < -VaR_{1an,1\%}) = 1\%$$

¹La décomposition de Cholewsky d'une matrice symétrique définie positive Ω permet de trouver une unique matrice notée $\Omega^{1/2}$ triangulaire inférieure telle que:

$$\Omega^{1/2} (\Omega^{1/2})' = \Omega$$

où $(\Omega^{1/2})'$ désigne la transposée de $\Omega^{1/2}$.