Master Psychologie, Vie et Santé
NCI – NPC – NCC

2005-2006

Psychologie Cognitive et Psychophysique

<u>Annexes</u>

Pr. Claude Bonnet
Université Louis Pasteur (Strasbourg 1)
Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Education
bonnet@ipb.u-strasbg.fr

Logarithmes

Le logarithme d'un nombre positif est , dans une base donnée *a*, l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever ***a*** pour retrouver le nombre. Autrement dit, la base d'un logarithme est le nombre dont le logarithme vaut 1.

Exemples :
logarithme décimal: $\log_{10}(10)=1$; *se lit "logarithme de base 10 de 10"*
$\log_{10}(5) = 0.699$ puisque ce chiffre peut s'écrire $5 = 10^{0.699}$

Ces logarithmes étant les plus fréquemment utilisés, on se dispense généralement d'écrire leur base (10).

logarithme naturel: sa base *e = 2.7183,* $\log_e(2.7183) =1$; $\log_e(5) = 1.6094$,
$5 = e^{1.6094}$, $\log_e$ est souvent écrit *ln (log naturel)*

On utilise encore **logarithme de base 2**: log2(2)=1; log2(5) = log10 (5) / log10(2) = 2.3219

X	$\log_{10}(x)$	$\log_e$	$\log_2$
0.01	-2	-4.6052	-6.6439
0.1	-1	-2.3026	-3.3219
1	0	0	0
2	0.301	0.6931	**1**
2.7183	0.4343	**1**	1.4427
5	0.699	1.6094	2.3219
10	**1**	2.3026	3.3219
100	2	4.6052	6.6439
1000	3	6.9078	9.9658
10000	4	9.2103	13.2877

Les logarithmes ne sont pas utilisés que pour rendre linéaires des fonctions, comme ils dilatent l'échelles des valeurs faibles et contractent l'échelle des valeurs élevées, ils permettent souvent de faire apparaître plus clairement des propriétés du côté des valeurs faibles.

Ils permettent aussi de simplifier des calculs.

Rappel

$\log(a*b) = \log(a) + \log(b)$

$\log(a/b) = \log(a) – \log(b)$

$\log(a^b) = b * \log(a)$

Les décibels

Dans de nombreux cas, les intensités des stimuli seront exprimés sur une échelle logarithmique particulière : les décibels. Cet usage est traditionnel en audition où l'intensité d'un son est exprimée en décibels (dB), soit le logarithme du rapport entre une intensité et une intensité de référence. Par exemple, pour l'intensité (I) mesurée en watts/m² :

$$n(dB) = 10 \log (I/I_0)$$

où I_0 est l'intensité de référence par convention 10^{-6} W/m². Si on utilise la mesure de la pression acoustique mesurée en micropascals (µPa), on aura ***n(dB)= 20 log(p/p₀)*** avec comme pression de référence p_0 = 20 µPa. On parle alors de *niveau de pression acoustique* exprimée en ***dB SPL*** (Sound Pressure Level). L'intensité (ou puissance) étant égale au carré de la pression explique le passage d'un facteur 10 à un facteur 20 dans les deux formules précédentes.

Niveau total de plusieurs sons : <u>on n'additionne pas les décibels.</u> Exemple : deux sources émettent l'une (A) un bruit de 85 dB et l'autre (B) de 93 dB, quel est le niveau total du bruit ? On doit additionner leurs intensités $I_A + I_B$ puis retransformer cette somme en dB. $I_A = 10^{\{(85/10) + \log(I0)\}}$ = 316.22 W/m², IB = 1995.26 W/m². La somme des deux bruits est alors de 93.64 dB. Plus généralement, doubler la puissance acoustique d'une source augmente son niveau SPL de 3 dB.

L'échelle des décibels peut s'appliquer à toute intensité physique : la luminance, le contraste en vision par exemple.

Fonction linéaire

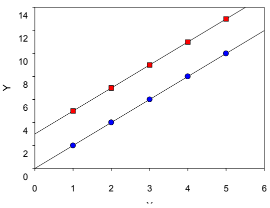
Dans une droite d'équation ***y = ax + b***, *a* est la pente, *b* l'ordonnée à l'origine (valeur de y quand x = zéro).

Exemples numériques :

Pour X – Y1 : b = 0 (la droite passe par l'origine {0,0}. La pente a = 2 : Y1 augmente deux fois plus vite que X

Pour **X – Y2** : b = 3 et la pente a = 2

X	Y1	Y2
1	2	5
2	4	7
3	6	9
4	8	11
5	10	13



Les paramètres ***a*** et ***b*** d'une fonction linéaire étant simples à calculer (cf. méthode des moindres carrés) on sera souvent amené à transformer une fonction non linéaire en une fonction linéaire pour en estimer les paramètres.

Exemple :

La fonction psychométrique (méthode Oui-Non) peut être estimée comme une fonction logistique d'équation :

$$p(x) = \{ 1 / [1 + (x/\alpha)^{\beta}]\}$$ où **α** est le seuil à 50%

Si les probabilité de répondre Oui – p(x) – sont transformées en *logits,* la fonction est une droite :

$$\text{logit}(p) = \ln\{p / (1 – p)\}$$

La fonction psychométrique (linéaire) est alors

$$\text{logit}(p) = ax + b$$

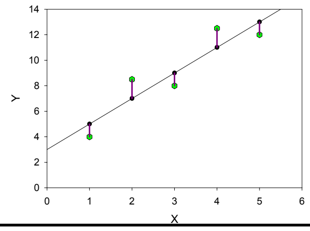
et le seuil **θ = {logit(0.5) – b} / a**

Comme logit(0.5) = 0, on écrit **θ = -b/a**

Méthode des moindres carrés

En raison des fluctuations aléatoires, une fonction théorique ajustée à des résultats expérimentaux (en Y vert) ne passe pas par tous les points. Il y a des *écarts* (en violet en plus ou en moins) entre les points expérimentaux (Y) et les points correspondants de la fonction ajustée (y). La méthode des moindres carrés est une méthode de calcul statistique qui, <u>une fois choisi le type de fonction à ajuster</u>, permet de trouver la valeur des paramètres qui minimise les carrés des écarts entre points expérimentaux et points de la fonction **(y-Y)²**.

X	Y	(y-Y)²
1	4	1
2	8.5	2.25
3	8	1
4	12.5	2.25
5	12	1



Les calculettes scientifiques permettent de calculer par la méthode des moindres carré les paramètres de pente et d'ordonnée à l'origine d'une *fonction linéaire* (d'où l'intérêt de certaines transformations).

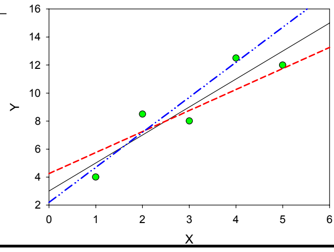
Si le type de la fonction est bien choisi (cf. plus loin), alors les paramètres *a* et *b* de l'équation ajustée sont les meilleurs possibles. Dans l'exemple précédent, le calcul de la droite des moindres carrés donne :

$$Y = (2 \cdot X) + 3 \rightarrow \Sigma(y - Y)^2 = 7.5 \text{ (droite noire)}$$

Tout autre ajustement de droite est moins satisfaisant.

a = 1.5 b = 4.25 (tirets courts) – $\Sigma(y - Y)^2 = 10.31$

a = 2.5 b = 2.2 (tirets – points) $\rightarrow \Sigma(y - Y)^2 = 12.45$



Estimer les paramètres d'une fonction

Il existe plusieurs manières d'estimer les paramètres *a* et *b* de ces fonctions à deux paramètres. De nombreux logiciels permettent ces estimations sans transformation des données. La méthode la plus élémentaire permet d'obtenir ces estimations avec une simple calculette scientifique. Celle-ci dispose d'une fonction appelée la **méthode des moindres carrés** qui consiste à minimiser les carrés des écarts entre chaque point expérimental (y) et le point correspondant d'une fonction linéaire (y'). Pour ce faire, on réalise une transformation des données qui permette l'ajustement d'une droite.

Les principales fonctions ajustées à des résultats d'échelles psychophysiques sont les suivantes :

fonction linéaire :	y = **ax** + **b**	
fonction de puissance :	y = **b**$x^{\mathbf{a}}$	⟷ log(y) = log(**b**) + **a** log(x)
fonction exponentielle :	y = **b**$\mathbf{a}^{x}$	⟷ log(y) = log(**b**) + x log(**a**)
fonction logarithmique :	y = **a** log(x) + **b**	⟷ y = **a** log(x) + **b**

Fonction de puissance

A partir des données expérimentales (figure à gauche), en transforme x en log(x) et y en log(y). Sur les données obtenues (figure de droite), on ajuste par la méthode des moindres carrés une droite :

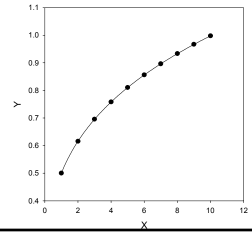
$$\log(y) = \log(b) + a \log(x) = 0.3 \log(x) - 0.3.$$

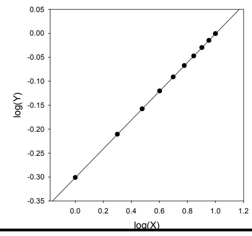
$$\log(b)=-0.3 \rightarrow b=10^{\log(b)} = 0.5$$

$$y = 0.5\, x^{0.3}$$

L'exposant d'une fonction de puissance peut être a < 1, la fonction est négativement accélérée, a > 1 la fonction est positivement accélérée. Il peut aussi être négatif, alors la fonction est décroissante (cf. fonctions de Weber ou de Piéron)

(a)



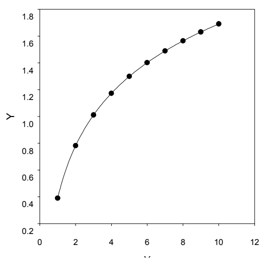


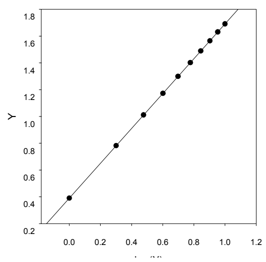
Fonction logarithmique

A partir des données expérimentales (figure à gauche), en transforme x en log(x). Sur les données obtenues (figure de droite), on ajuste par la méthode des moindres carrés une droite :

$$y = b + a \log(x) = (1.3\, x) + 0.39$$

(b)





Fonction exponentielle

A partir des données expérimentales (figure à gauche), en transforme y en log(y). Sur les données obtenues (figure de droite), on ajuste par la méthode des moindres carrés une droite :

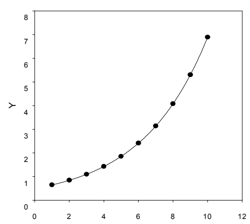
$$\log(y) = \log(b) + x \log(a) = (0.1139\, x) - 0.3.$$

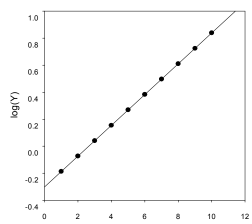
$$\log(b)=-0.3 \rightarrow b=10 \log(b) = 0.5 \quad \text{et } \log(a)= 0.1139 \rightarrow a=10\log(a) = 1.3$$

$$y = 0.5\; 1.3^{x}$$

Si l'exposant de la fonction de puissance est positif et a >1, la fonction est positivement accélérée, si a est positif et a < 1 la fonction est décroissante et négativement accélérée, si a est négatif et -a > -1 la fonction est décroissante et positivement accélérée, si a est négatif et –a < -1 la fonction est croissante et négativement accélérée.

(c)





Valeurs numériques des trois fonctions précédentes
(a, b, c)

X	Y(a)	Y(b)	Y(c)	log(X)	log(y(a))	log(y(c))
1	**0.5000**	**0.3900**	**0.6500**	**0.0000**	**-0.3010**	**-0.1871**
2	**0.6156**	**0.7813**	**0.8450**	**0.3010**	**-0.2107**	**-0.0731**
3	**0.6952**	**1.0103**	**1.0985**	**0.4771**	**-0.1579**	**0.0408**
4	**0.7579**	**1.1727**	**1.4281**	**0.6021**	**-0.1204**	**0.1547**
5	**0.8103**	**1.2987**	**1.8565**	**0.6990**	**-0.0913**	**0.2687**
6	**0.8559**	**1.4016**	**2.4134**	**0.7782**	**-0.0676**	**0.3826**
7	**0.8964**	**1.4886**	**3.1374**	**0.8451**	**-0.0475**	**0.4966**
8	**0.9330**	**1.5640**	**4.0787**	**0.9031**	**-0.0301**	**0.6105**
9	**0.9666**	**1.6305**	**5.3022**	**0.9542**	**-0.0148**	**0.7245**
10	**0.9976**	**1.6900**	**6.8929**	**1.0000**	**-0.0030**	**0.8384**

Quelle fonction ajuster ?

Utiliser la méthode des moindres carrés ne prouve pas que la fonction choisie est la bonne (ou la meilleure).

Que faire devant des données expérimentales lorsque l'on n'a pas de raisons théoriques de choisir une fonction plutôt qu'une autre ?

Face à des données qui laissent supposer une croissance monotone des réponses, on pourra comparer la valeur de l'ajustement des quatre solutions précédentes : linéaire, puissance, exponentielle et logarithmiques.

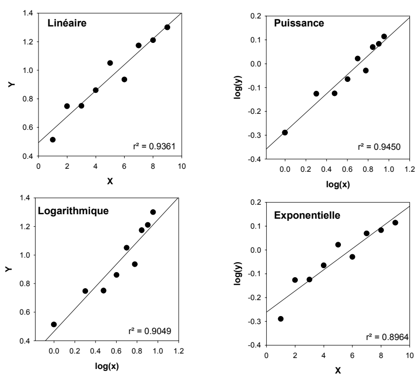
En utilisant éventuellement les transformations mentionnées précédemment, nous comparons l'ajustement d'une droite des moindres carrés aux quatre solutions. Le carré du coefficient de corrélation (**r²**) est l'indice de la valeur de l'ajustement (*goodness of the fit)*.

Note: la valeur de **r²** est indépendante des unités de X et de Y, ce qui n'est pas le cas pour $\Sigma(y - Y)^2$

Résultats expérimentaux :

X	Y	log(X)	log(Y)
1.0	0.5133	0.0000	-0.2896
2.0	0.7473	0.3010	-0.1265
3.0	0.7500	0.4771	-0.1249
4.0	0.8600	0.6021	-0.0655
5.0	1.0500	0.6990	0.0212
6.0	0.9347	0.7782	-0.0294
7.0	1.1727	0.8451	0.0692
8.0	1.2100	0.9031	0.0828
9.0	1.3000	0.9542	0.1139

	abscisse	ordonnée
fonction linéaire	**X**	**Y**
puissance	**log(X)**	**log(Y)**
logarithmique	**log(X)**	**Y**
exponentielle	**X**	**log(Y)**



Le **coefficient r²** teste la valeur de l'ajustement : plus il est élevé, plus faible est la somme des carrés des écarts entre les points expérimentaux et la droite des moindre carrés. Dans l'exemple précédent, le meilleur ajustement est une fonction de puissance. Cette solution sera choisie s'il n'y a pas d'autres argument pour le choix d'une autre fonction.

Probabilités

Une probabilité est le rapport entre un évènement particulier et le nombre d'évènements possibles. Une probabilité est donc un nombre compris entre zéro et 1. L'exemple le plus simple est celui du jeux de pile ou face. La probabilité à chaque lancer de tomber sur face – p(f) – est de p(f) = 0.5 autrement dit une chance sur deux. Si deux évènements (a et b) sont disjoints (i.e. incompatibles, ils ne peuvent pas se produire ensemble, alors p(a) + p(b) = 1.

Dans l'exemple précédent, les deux évènements (*a* et *b*) sont indépendants. La probabilité d'obtenir *a* si *b* est apparu – p(a / b) - reste égale à la probabilité de *a : p(a / b) = p(a).* Le modèle est ici celui du ***tirage avec remise*** dans une urne dont la composition reste constante.

Par contre, si les deux évènements ne sont pas indépendants *p(a / b) = p(a . b) / p(b) :* la probabilité d'obtenir *a* si *b* est apparu est égale à la probabilité d'obtenir *a et b* – p(a . B) – divisé par la probabilité d'apparition de *b*. Un exemple de ce cas est donné avec la TDS où par exemple *p(s/B) = p(s . B) / p(B)*.