Exercice 1

$[AB]$ est un segment de longueur donnée L.
On désigne par Γ l'ensemble des points M du plan tels que $\left\| 2\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} \right\| = L$
et par O le symétrique du point B par rapport à A.

Montrer que Γ est le cercle de centre O et de rayon L, puis tracer cet ensemble.

Exercice 2

On considère deux points A et B tels que $AB = 6$.
On désigne par I le milieu de $[AB]$.

1. Exprimer $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ en fonction de IM^2.
2. En déduire alors l'ensemble E_1 des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 7$. Construire E_1.
3. Exprimer $MA^2 + MB^2$ en fonction de IM^2.
4. En déduire alors l'ensemble E_2 des points M du plan vérifiant $MA^2 + MB^2 = 26$. Construire E_2.

Exercice 3

Soit A, B et C trois points non alignés.

1. M étant un point quelconque du plan, montrer que le vecteur

$$\vec{u}(M) = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$$

est un vecteur constant.

2. En déduire alors que $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC}$

Exercice 4

On considère deux points A et B tels que $AB = 8$

1. Construire G barycentre des points pondérés $(A,5)$ et $(B,3)$
2. Construire H barycentre des points pondérés $(A,11)$ et $(B,-3)$
3. M étant un point du plan justifier que les vecteurs $\vec{u} = 5\vec{MA} + 3\vec{MB}$ et $\vec{v} = 11\vec{MA} - 3\vec{MB}$ sont colinéaires à $\vec{MG}$ et $\vec{MH}$.
4. Déterminer l'ensemble E_1 des points M du plan vérifiant $$\left\| 5\vec{MA} + 3\vec{MB} \right\| = \left\| 11\vec{MA} - 3\vec{MB} \right\|.$$ Construire E_1.

La question 5. ne peut pas être traitée pour l'instant...

5. Déterminer l'ensemble E_2 des points M du plan vérifiant $(5\vec{MA} + 3\vec{MB}).(11\vec{MA} - 3\vec{MB}) = 0$

Exercice 5

A, B et C sont trois points non alignés de E et G est le centre de gravité du triangle ABC.
Pour tout point M du plan, on pose

$$\vec{V} = 2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}$$

1. Montrer que pour tout point M du plan, $\vec{V}$ est un vecteur indépendant du point M.
2. Montrer que l'ensemble des points M de E tel que: $$\left\| \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} \right\| = \left\| 2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} \right\|$$ est un cercle de centre G dont on précisera le rayon et que l'on construira.

Exercice 6

1. Construire H barycentre des points pondérés $(A,1)$ et $(B,3)$.
2. Construire G barycentre des points pondérés $(H,4)$ et $(C,5)$.
3. Justifier que $\vec{GA} + 3\vec{GB}$ est colinéaire à $\vec{GH}$. En déduire alors que $$\vec{GA} + 3\vec{GB} + 5\vec{GC} = \vec{0}.$$
4. Soit K le barycentre des points pondérés $(A,1)$ et $(C,5)$. Montrer alors que G est le barycentre des points pondérés $(B,3)$ et $(K,6)$.

Exercice 7

Soit trois points A, B et C non alignés. On désigne par G le barycentre des points pondérés (A,3), (B,4) et (C,2).

1. Soit H le point tel que $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Déterminer deux nombres b et c tels que H soit le barycentre de (B,b) et (C,c).
2. Montrer alors que les points A, G et H sont alignés. Construire alors G.
3. Déterminer l'ensemble $E = \left\{ M \in P \;\middle|\; \vec{u} = 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} \text{ soit colinéaire à } \overrightarrow{AB} \right\}$. Construire E.

Exercice 8

Soit ABCD un rectangle tel que $AB = 5$ et $BC = 9$

1. Construire G barycentre des points pondérés (A;1), (B;1), (C;1) et (D;2)
Faire un dessin précis et expliquer la méthode utilisée
2. Soit I le milieu de $[BC]$ et K le point vérifiant $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$
Montrer que les points I, J et K sont alignés.
3. Déterminer et construire l'ensemble E des points M du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{BC}$.

Exercice 9

Soit trois points A , B et C non alignés. On désigne par I le barycentre des points pondérés (B,2) et (C,1), par J et K les points définis par $\overrightarrow{CJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$. Faire un dessein.

1. Exprimer J et K comme barycentres de deux points choisis parmi A, B, C et affétés de coefficients à préciser.
2. Démontrer alors que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes.

Exercice 9

ABCD est un carré de centre O et de côté 4cm.
Pour tout point M du plan, on pose :

$$\vec{V} = \vec{MB} - \vec{MA} + \vec{MC} - \vec{MD}$$

G est le barycentre des points pondérés $\{(B,1);(C,-4);(D,1)\}$

1. Le système $\{(A,-1);(B,1);(C,1);(D,-1)\}$ admet-il un barycentre ?
2. En déduire que pour tout point M du plan: $\vec{V} = 2\vec{AB}$.

3 Montrer que G est symétrique de O par rapport à C.

4. Construire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left\|\vec{MB} - 4\vec{MC} + \vec{MD}\right\| = \left\|\vec{MB} - \vec{MA} + \vec{MC} - \vec{MD}\right\|$$

Exercice 10

Soit ABCD un rectangle tel que $AB = 6$ et $BC = 10$

1. Construire G barycentre des points pondérés (A,1), (B,2), (C,3) et (D,6)
2. Déterminer l'ensemble $E = \left\{M \in \text{plan} \,\middle|\, \left\|\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC} + 6\vec{MD}\right\| = 3\right\}$.

   Construire E.

Exercice 11

Soit A, B et C trois points du plan non alignés

1. Construire G barycentre des points (A,1),(B,1) et (C,2).
2. Déterminer $E = \left\{M \in P \,\middle|\, \left\|\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC} = AB\right\|\right\}$. Construire E_1.
3. Soit H tel que $\vec{AH} = \frac{2}{3}\vec{AC}$. Montrer que les points B, G et H sont alignés.
4. Soit K tel que $\vec{BK} = \frac{2}{3}\vec{BC}$. J étant le milieu de $[AB]$, montrer que les droites (CI), (BH) et (AK) sont concourantes.

Exercice 12

A, B et C sont trois points non alignés de E.
Soit les deux systèmes de points pondérés: $S_1 = \{(A,-2);(B,1)\}$ et $S_2 = \{(A,3);(C,1)\}$

1. Ces deux systèmes admettent-ils des barycentres?
Si oui les construire; on les notera respectivement G_1 et G_2.
2. Soit G l'isobarycentre des points A, B et C.
Montrer que G est le barycentre de $(G_1,-1)$ et $(G_2,4)$.
3. En déduire la position relative des trois points G, G_1 et G_2.

Exercice 13

Soit A et B deux points tels que $AB = 5$
1. Construire G barycentre des points pondérés $(A;2)$ et $(B;3)$
2. Construire G' barycentre des points pondérés $(A;-1)$ et $(B;6)$
3. Déterminer et construire l'ensemble

$$E_1 = \left(M \in \text{plan} \,\middle|\, \left\| 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} \right\| = 10 \right)$$

4. Déterminer et construire l'ensemble

$$E_2 = \left(M \in \text{plan} \,\middle|\, \left\| 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} \right\| = \left\| -\overrightarrow{MA} + 6\overrightarrow{MB} \right\| \right)$$

5. Déterminer et construire l'ensemble

$$E_3 = \left(M \in \text{plan} \,\middle|\, (2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}).(-\overrightarrow{MA} + 6\overrightarrow{MB}) = 0 \right)$$

6. Déterminer et construire l'ensemble

$$E_4 = \left(M \in \text{plan} \,\middle|\, \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}) = -10 \right)$$