

EXERCICE 1

1) a) si d divise $3n + 4$ et $9n - 5$, alors d divise 17.
Si d divise $3n + 4$ et $9n - 5$ alors d divise $3(3n + 4) - (9n - 5)$
or $3(3n + 4) - (9n - 5) = 17$ donc d divise 17

b) si d divise a et b alors il existe deux entiers relatifs p et q tels que $a = dp$ et $b = dq$
donc $3a + 13b = 3dp + 13dq = d(3p + 13q)$
 $3p + 13q$ est un entier relatif donc d divise $3a + 13b$
de même pour $a + 4b$

c) si 17 divise $a - 5b$, il existe un entier relatif q tel que $a - 5b = 17q$ donc $a = 17q + 5b$.
donc $10a + b = 10(17q + 5b) + b$
 $10a + b = 170q + 51b = 17(10q + 3b)$ or $10q + 3b$ est un entier relatif donc 17 divise $10a + b$

2)
Soit $n = 3a + 13b$ et $N = a + 4b$ si d divise n et N alors en éliminant b entre les deux expressions :
 d divise $-4n + 13N = a$ donc d divise a
 d divise $n - 4N = b$ donc d divise b

EXERCICE 2

1) $105 = 3 \times 35 = 3 \times 5 \times 7$ donc les diviseurs positifs de 105 sont 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 15 ; 21 ; 35 ; 105.

2) $x + 2y$ et $2x - 3y$ sont des entiers relatifs diviseurs de 15 donc

$A = x + 2y$	-15	-5	-3	-1	1	3	5	15
$B = 2x - 3y$	-1	-3	-5	-15	15	5	3	1
$x = \frac{1}{7}(3A + 2B)$	$-\frac{47}{7}$	-3	$-\frac{19}{7}$	$-\frac{33}{7}$	$\frac{33}{7}$	$\frac{19}{7}$	3	$\frac{47}{7}$
$y = \frac{1}{7}(2A - B)$	$-\frac{29}{7}$	-1	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{13}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{29}{7}$

Les seules solutions entières sont $x = -3$ et $y = -1$ ou $x = 3$ et $y = 1$

3) $x^2 = (y - 2)^2 + 21 \Leftrightarrow x^2 - (y - 2)^2 = 21$
 $\Leftrightarrow (x - y + 2)(x + y + 2) = 21$
 $x + y + 2$ est un entier relatif diviseur de 21 donc

$A = x + y - 2$	-21	-7	-3	-1
$B = x - y + 2$	-1	-3	-7	-21
$x = \frac{1}{2}(A + B)$	-11	-5	-5	-11
$y = \frac{1}{2}(A - B) + 2$	-8	0	4	12

$A = x + y - 2$	1	3	7	21
$B = x - y + 2$	21	7	3	1
$x = \frac{1}{2}(A + B)$	11	5	5	11
$y = \frac{1}{2}(A - B) + 2$	-8	0	4	12

x et y sont des entiers naturels donc les solutions sont les couples $(x ; y) \in \{(5 ; 0) (5 ; 4) (11 ; 12)\}$

EXERCICE 3

1) $6x - 15y = 3(6x - 15y)$ avec $6x - 15y$ entier relatif donc $6x - 15y$ est un multiple de 3 or 1 n'est pas un multiple de 3 donc il n'existe pas d'entiers relatifs tels que $6x - 15y = 1$.

3) Si n est un multiple de 15, il existe k entier relatif tel que $n = 15k$
Si n est un diviseur de 100, il existe a entier relatif tel que $100 = nq$
donc $100 = 15kq$, soit $20 = 3(kq)$ or kq est un entier relatif donc il faudrait que 3 divise 20 ce qui est faux donc il n'existe pas d'entier qui soit un multiple de 15 et un diviseur de 100.

Exercice 4

- n divise $n + 7 \Leftrightarrow n$ divise $n + 7 - n \Leftrightarrow n$ divise 7 $\Leftrightarrow n = 1$ ou $n = 7$
- n divise $n + 12 \Leftrightarrow n$ divise $n + 12 - n \Leftrightarrow n$ divise 12 $\Leftrightarrow n \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12\}$
- $n - 1$ divise $n + 11 \Leftrightarrow n - 1$ divise $(n + 11) - (n - 1) \Leftrightarrow n - 1$ divise 12 $\Leftrightarrow n - 1 \in \{-1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12\}$
($n - 1$ est supérieur ou égal à -1)
 $\Leftrightarrow n \in \{0 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 7 ; 13\}$

Exercice 5

$a^2 - ab = 24 \Leftrightarrow a(a - b) = 24 \Leftrightarrow a$ divise 24 ($a \in \mathbb{N}$)

a	1	2	3	4	6	8	12	24
$a - b$	24	12	8	6	4	3	2	1
$b = a - (a - b)$	23	10	5	2	2	5	10	23

b est un entier naturel donc $(a ; b) \in \{(6 ; 2) (8 ; 5) (12 ; 10) (24 ; 23)\}$

Exercice 6

- les diviseurs de 25 sont $-25 ; -5 ; -1 ; 1 ; 5 ; 25$
- $a^2 - b^2 = 25 \Leftrightarrow (a - b)(a + b) = 25$
 $a + b$ est un diviseur de 25 donc

$A = a + b$	-25	-5	-1	1	5	25
$B = a - b$	-1	-5	-25	25	5	1
$a = \frac{1}{2}(A + B)$	-1	-5	-25	25	5	1
$b = \frac{1}{2}(A - B)$	-13	-5	-13	13	5	13

a et b sont des entiers naturels donc $(a ; b) \in \{(25 ; 13) (5 ; 5) (1 ; 13)\}$