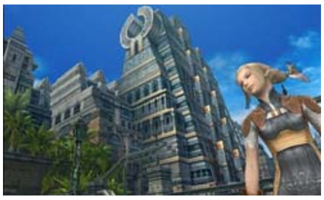
Résolution d'équations



Comment résoudre une équation sans inconnue au dénominateur :

Théorème 1 :

Un produit de facteurs est nul
si et seulement si l'un des facteurs est nul :
$A.B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$

exemple 1 :

$3x(2x+12)(x^2+4) = 0 \Leftrightarrow 3x = 0$ ou $2x + 12 = 0$ ou $x^2 + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -6$ ou $x^2 = -4$

impossible car un carré est toujours positif

$S = \{-6 ; 0\}$

exemple 2 :

Résoudre l'équation $(E) : (x+1)^2 = 3(x+1)(x-3)$

Pour résoudre une équation du type $A(x) = B(x)$, on transpose d'abord tous les termes du même côté de l'égalité pour obtenir une équation de la forme $C(x) = 0$

$(E) \Leftrightarrow (x+1)^2 - 3(x+1)(x-3) = 0$

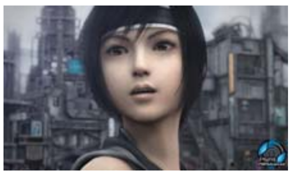
$\Leftrightarrow (x+1)[(x+1) - 3(x-3)] = 0$ — on factorise ensuite $C(x)$

$\Leftrightarrow (x+1)(-2x+10) = 0$

$\Leftrightarrow x + 1 = 0$ ou $-2x + 10 = 0$ — on applique le théorème 1

$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 5$

Les solutions de l'équation sont -1 et 5.



Comment résoudre une équation avec inconnue au dénominateur :

Théorème 2 :

Un quotient est nul , si et seulement si :
le numérateur est nul , mais pas le dénominateur :

$$\frac{N}{D} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad N = 0 \quad \text{et} \quad D \neq 0$$

exemple 2 :

Résoudre $(E) : \dfrac{x+5}{x^2-3} = 0$

$D = \mathbb{R} / \left\{-\sqrt{3} ; \sqrt{3}\right\}$

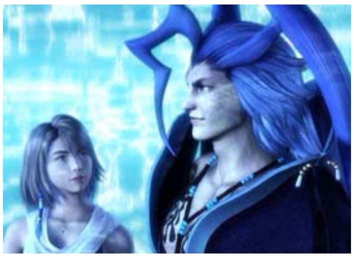
On détermine d'abord le domaine de définition de (E)

On résout ensuite (E) par équivalence :

$(E) \Leftrightarrow x+5=0 \quad \text{et} \quad x \in D$

$\Leftrightarrow x = -5 \quad \text{et} \quad x \in D$

- 5 est la seule solution de l'équation



exemple 3 :

Résoudre l'équation $(F) : x+2 = \dfrac{1}{x+2}$

$D = \mathbb{R} / \{-2\}$

$(F) \Leftrightarrow \dfrac{(x+2)^2}{x+2} - \dfrac{1}{x+2} = 0$

On a réduit au même dénominateur

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+2)^2 - 1}{x+2} = 0$

Th 2 : un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul

$\Leftrightarrow (x+2)^2 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad x \in D$

$\Leftrightarrow (x+2-1)(x+2+1) = 0 \quad \text{et} \quad x \in D$

Identité remarquable : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$\Leftrightarrow (x+1)(x+3) = 0 \quad \text{et} \quad x \in D$

$\Leftrightarrow x+1=0 \quad \text{ou} \quad x+3=0 \quad \text{et} \quad x \in D$

$\Leftrightarrow x = -1 \quad \text{ou} \quad x = -3 \quad \text{et} \quad x \in D$

L'équation (F) admet donc pour solutions - 1 et - 3 : $S = \{-1 ; -3\}$

Théorème 3 :

Si deux quotients ont le même dénominateur alors on comparera les numérateurs :
$$\frac{A}{B}=\frac{C}{B} \Leftrightarrow A = C \quad \text{et} \quad B \neq 0$$

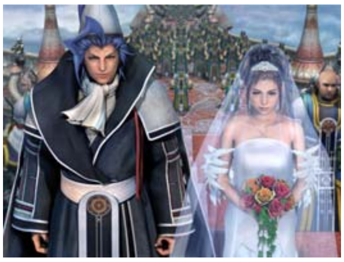
exemple 3 : résoudre (E) : $\dfrac{x+5}{x-3}=2$

pour $x \in D = \mathbb{R}^* / \{3\}$ (E) $\Leftrightarrow \dfrac{x+5}{x-3}=\dfrac{2(x-3)}{x-3}$

$\Leftrightarrow \quad x + 5 = 2x - 6 \qquad$ avec $x \neq 3$

$\Leftrightarrow \quad x = 11 \qquad$ avec $x \neq 3$

S = $\{11\}$



exemple 4 :

Résoudre l'équation (E) : $\dfrac{2}{x+3}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{x^2+3x}$

$D=\mathbb{R} / \{-3;0\} = \mathbb{R}^* / \{-3\}$

(E) $\Leftrightarrow \dfrac{2x}{x(x+3)}+\dfrac{1(x+3)}{x(x+3)}=\dfrac{3}{x(x+3)}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x+x+3}{x(x+3)}=\dfrac{3}{x(x+3)}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3x+3}{x(x+3)}=\dfrac{3}{x(x+3)}$

$\Leftrightarrow 3x + 3 = 3$ et $x \in D$

On a appliqué le théorème 3

$\Leftrightarrow \quad x = 0$ et $x \in D$

à rejeter car $0 \notin D$

L'équation (E) n'admet donc pas de solution : S = $\varnothing$