Représentation paramétrique d'une droite dans l'espace

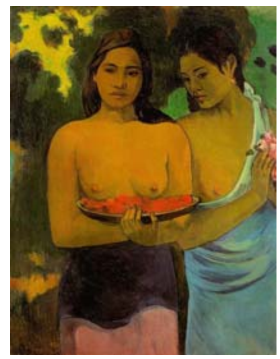
On travaille dans l'espace de repère orthonormal $\left(O;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$

Soit $D\left(A\,;\vec{u}\right)$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$

$M(x;y;z)\in D\left(A\,;\vec{u}\right)$ $\Leftrightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow\ \exists\lambda\in\mathbb{R}\ /\ \overrightarrow{AM}=\lambda\vec{u}$$

$$\Leftrightarrow\ \exists\lambda\in\mathbb{R}\ /\ \begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_A\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$



$$\Leftrightarrow\ \exists\lambda\in\mathbb{R}\ /\begin{cases}x-x_A=\lambda a\\y-y_A=\lambda b\\z-z_A=\lambda c\end{cases}$$

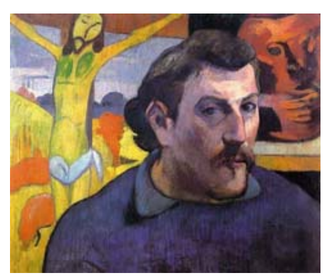
$$\Leftrightarrow\ \exists\lambda\in\mathbb{R}\ /\ \begin{cases}x=x_A+\lambda a\\y=y_A+\lambda b\\z=z_A+\lambda c\end{cases}$$

Système d'équations paramétriques caracterisant la droite *D*

Dans l'espace, une droite n'est pas représentée par une équation , mais par un système d'équations. (cf. ex1 et ex2)

exemple 1 : Quel est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ dont les coordonnées vérifient le système (S) suivant : $\begin{cases}x=3\lambda+2\\y=-\lambda+4\\z=2\lambda-3\end{cases}$?

$$M(x;y;z)\in(S)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x=3\lambda+2\\y=-\lambda+4\\z=2\lambda-3\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x-2=3\lambda\\y-4=-\lambda\\z+3=2\lambda\end{cases}$$



$$\Leftrightarrow\ \begin{pmatrix}x-2\\y-4\\z+3\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\ \exists\lambda\in\mathbb{R}\ /\ \overrightarrow{AM}=\lambda\vec{u}\quad\text{avec } A(2\,;4\,;-3)\text{ et }\vec{u}\,(3;-1;2)$$

(S) est donc la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$

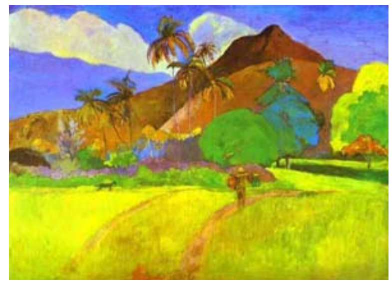
exemple 2 : Soit (P) et (Q) les plans d'équations respectives $2x+3y-z=6$ et $x+2y+z=4$

a) Montrer que ces deux plans sont sécants.

Les vecteurs normaux respectifs de (P) et (Q) sont $\vec{n}(2;3;-1)$ et $\vec{n'}(1;2;1)$

$\vec{n}$ et $\vec{n'}$ colinéaires $\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R} \ / \ \vec{n'}=\lambda\vec{n}$

$$\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R} \ / \ \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$$



$$\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R} \ / \ \begin{cases}\lambda=\frac{1}{2}\\ \lambda=\frac{2}{3}\\ \lambda=-1\end{cases} \text{ : impossible}$$

donc $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires

On en déduit que (P) et (Q) ne sont pas parallèles et se coupent donc selon une droite D.

b) Déterminer l'intersection des deux plans

$$M(x;y;z)\in(D) \Leftrightarrow \begin{cases}2x+3y-z=6\\ x+2y+z=4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x+3y=6+\alpha & : L_1\\ x+2y=4-\alpha & : L_2\\ z=\alpha\end{cases}$$

On pose $z=\alpha$ et
on exprime x et y en fonction de α

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-y=-2+3\alpha & : L_1\leftarrow L_1-2L_2\\ x+2y=4-\alpha & : L_2\\ z=\alpha\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=2-3\alpha & : L_1\\ x+2(2-3\alpha)=4-\alpha & : L_2\\ z=\alpha\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=5\alpha\\ y=-3\alpha+2\\ z=\alpha\end{cases}$$

Représentation paramétrique de la droite passant par $B(0\ ;\ 2\ ;\ 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(5;-3;1)$