TD N°2 : Correcteur à avance de phase

On considère un correcteur à avance de phase dont la fonction de transfert à pour forme dans le cas général : $H(p) = \dfrac{1+aTp}{1+Tp}$

Questions

1. Calculer le gain réel en dB et la phase réelle de ce système
2. En déduire les diagrammes asymptotiques de Bode de ce système. Les tracer.
3. Tracer directement à partir de la fonction de transfert de ce correcteur à avance de phase les diagrammes asymptotiques de Bode de ce système. Conclure sur la méthode qui donne le plus de renseignement au niveau des diagrammes asymptotiques de bode
4. Tracer sur les diagrammes asymptotiques de Bode l'allure des diagrammes réels en calculant le plus simplement possible les valeurs remarquables pour un correcteur de fonction de transfert $H(p) = \dfrac{1+p}{1+0{,}1p}$

CORRECTION
TD N°2 : Correcteur à avance de phase

Questions 1 :

On remplace p par jw dans la fonction de transfert du correcteur par avance de phase :

$$H(jw) = \frac{1+jaTw}{1+jTw}$$

On a donc un rapport de deux nombres complexes dont le module est le rapport des modules et l'argument (donc la phase), la différence des arguments donc des phases. Soit :

$\|H(jw)\| = \dfrac{\sqrt{1+a^2T^2w^2}}{\sqrt{1+T^2w^2}}$ et $j(w) = Arg[1+jaTw] - Arg[1+jTw]$.D'où le gain en dB et la phase de ce correcteur par avance de phase :

$$\begin{cases} \|H(jw)\|_{dB} = 20Log\sqrt{1+a^2T^2w^2} - 20Log\sqrt{1+T^2w^2} \\ j(w) = \arctan(aTw) - \arctan(Tw) \end{cases}$$

Questions 2 :

Diagramme asymptotique de Bode en gain :

On cherche des équivalents en basse fréquence $(w \to 0)$ et en haute fréquence $(w \to \infty)$ du gain en dB de la fonction de transfert de ce système :

$$\|H(jw)\|_{dB} = 20Log\sqrt{1+a^2T^2w^2} - 20Log\sqrt{1+T^2w^2}$$

- Pour $(w \to 0)$:

  On peut négliger les termes en w^2 devant 1 et on a alors : $\|H(jw)\|_{dB} \underbrace{\sim}_{w \to 0} 0dB$, c'est à dire une asymptote horizontale à 0dB.

- Pour $(w \to \infty)$:

  On peut négliger les termes en 1 devant w^2 et on a alors : $\|H(jw)\|_{dB} \underbrace{\sim}_{w \to \infty} 20Loga$, c'est à dire une asymptote horizontale à 20 Log a dB.

Diagramme asymptotique de Bode en phase :

On cherche des équivalents en basse fréquence $(w \to 0)$ et en haute fréquence $(w \to \infty)$ de la phase de la fonction de transfert de ce système :

$$j(w) = \arctan(aTw) - \arctan(Tw)$$

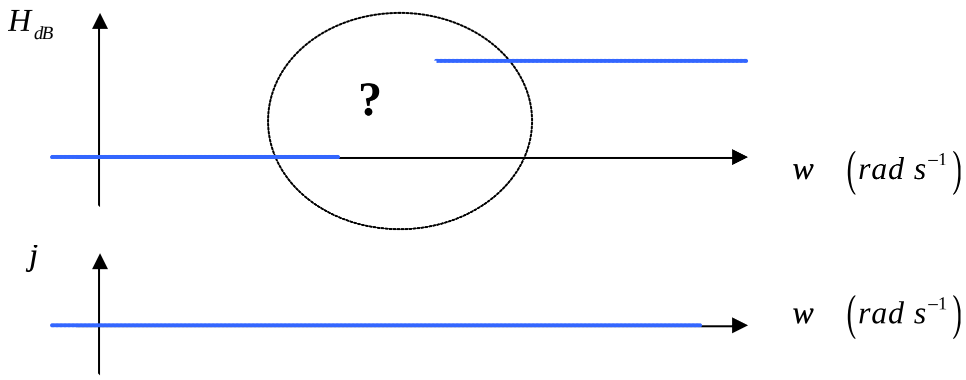
- Pour $(w \to 0)$:

  Les arctangentes tendent toutes les deux vers 0° et on a alors : $j(w) \underbrace{\sim}_{w \to 0} 0°$, c'est à dire une asymptote horizontale à 0°

- Pour $(\omega \to \infty)$:

  Les arctangentes tendent toutes les deux vers $\pi/2$ et on a alors : $\varphi(\omega) \underbrace{\longrightarrow}_{\omega \to \infty} 0°$, c'est à dire une asymptote horizontale à 20 Log a dB.

Ce qui donne des diagrammes asymptotiques de Bode inutilisables car incomplets et imprécis : Les deux asymptotes du diagramme de Bode en gain étant parallèles, on ne sait pas les « raccorder » :



Cette analyse fréquentielle globale du correcteur ne nous permet donc pas de façon très évidente d'étudier l'intérêt de ce dernier. On voit donc bien ici, et c'était d'ailleurs l'intérêt de la question, que cette méthode n'est pas la bonne. Il faut décomposer la fonction de transfert en un maximum de fonctions de transfert connues, ce que l'on va faire immédiatement.

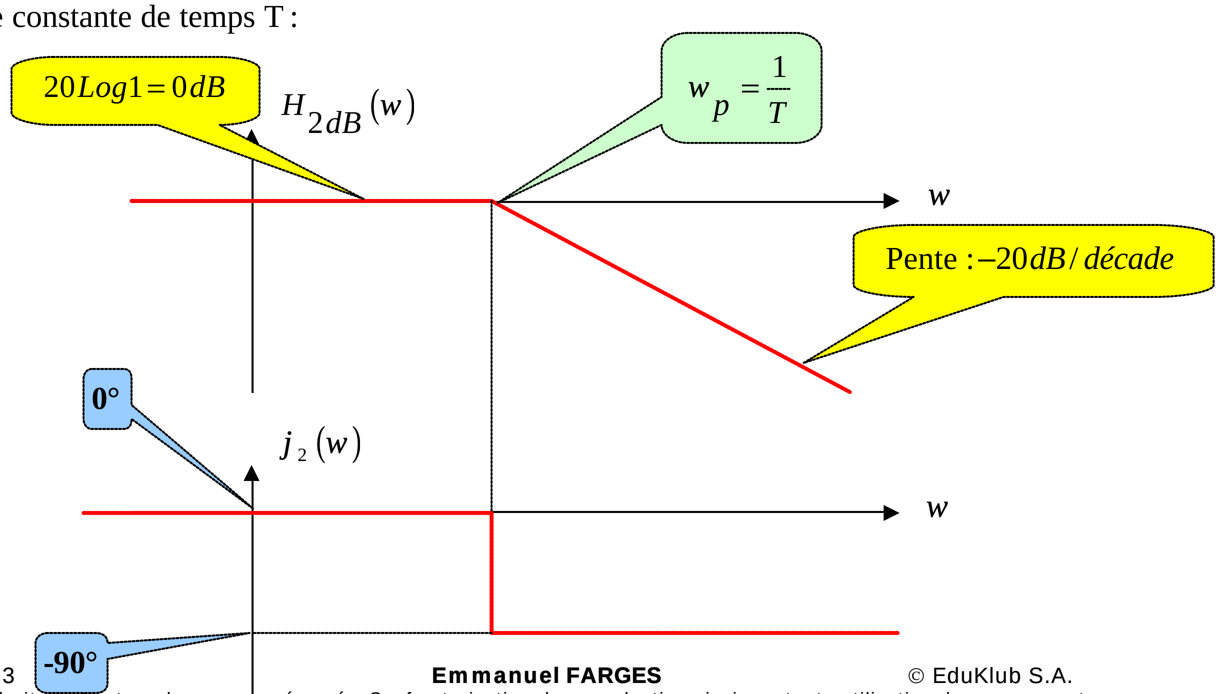
Questions 3 :

On décompose H(p) en produit de deux fonctions de transfert, $H_1(p)$ et $H_2(p)$.

$H(p) = H_1(p)H_2(p)$, avec : $H_1(p) = 1 + aTp$ et $H_2(p) = \dfrac{1}{1+Tp}$

Diagrammes de Bode asymptotiques de $H_2(p)$:

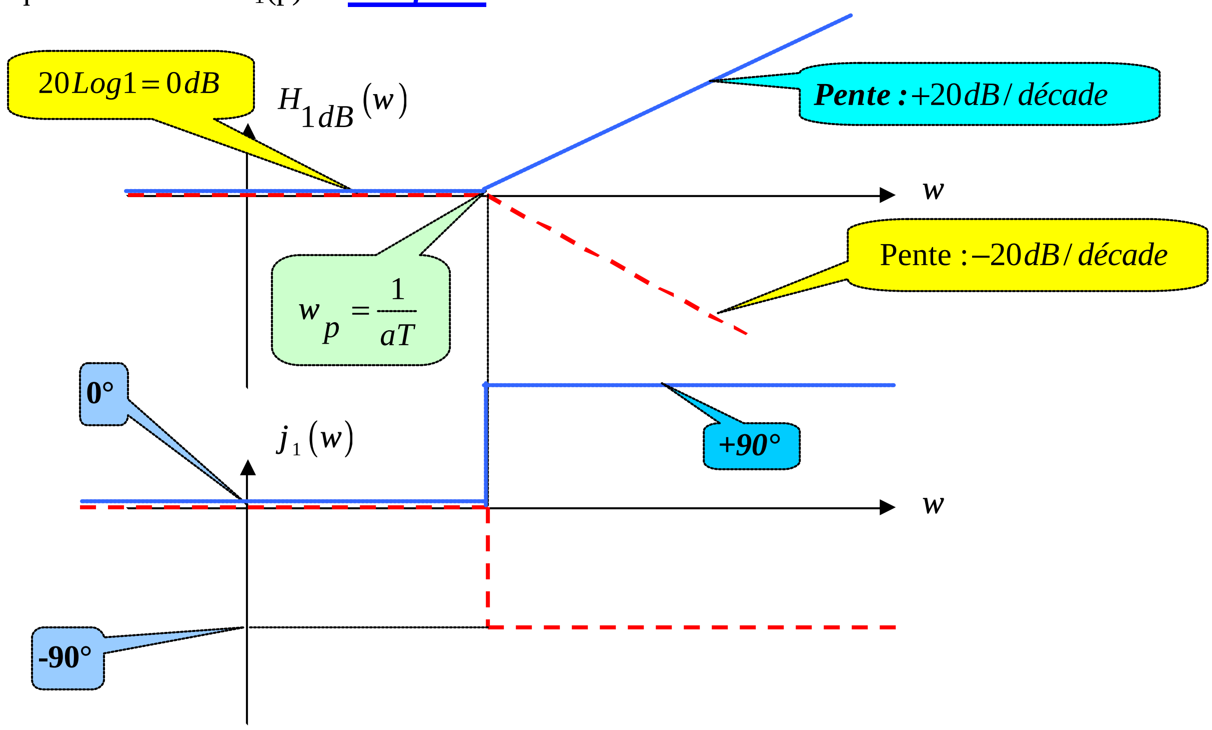
On peut les donner directement puisque $H_2(p)$ représente un premier ordre de gain statique 1 et de constante de temps T :



Diagrammes de Bode asymptotiques de $H_1(p)$:

$H_1(p)$ n'est autre que l'inverse d'un premier ordre de gain statique 1 et de constante de temps aT puisque : $H_1(p) = 1 + aTp = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{1+aTp}\right)}$. On peut donc donner ses diagrammes asymptotiques de Bode directement par symétrie (par rapport à 0dB et 0°) à partir des diagrammes du premier ordre :

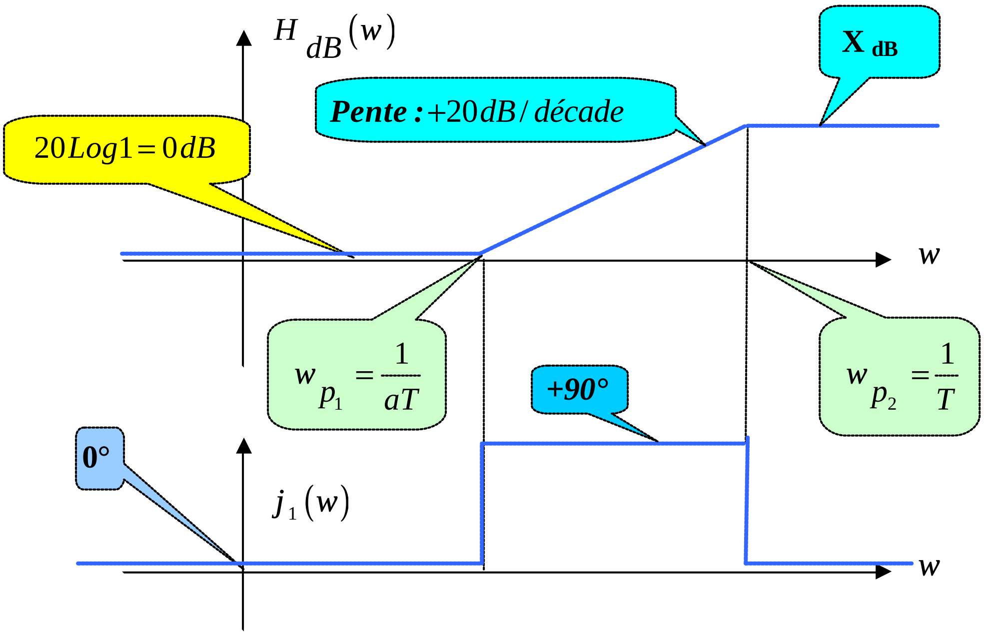
En ***rouge pointillé*** les diagrammes asymptotiques de $H(p) = \left(\dfrac{1}{1+aTp}\right)$,premier ordre de gain statique 1 et de constante de temps aT, qui permettent d'obtenir par symétrie les diagrammes asymptotiques de Bode de $H_1(p)$ en ***bleu foncé***.



Il reste donc à « sommer » les courbes rouge et bleu en raisonnant par plage fréquentielles, après avoir identifier et classer par ordre croissant les pulsations propres des différentes fonctions de transfert :

- $w \in \left[0; \dfrac{1}{aT}\right]$: $\begin{cases} H_{dB}(w) = 0 + 0 \quad dB \quad équivalent\ de\ pente\ 0dB/décade \\ j(w) = 0° + 0° \quad équivalent\ à\ 0° \end{cases}$
- $w \in \left[\dfrac{1}{aT}; \dfrac{1}{T}\right]$: $\begin{cases} H_{dB}(w): \quad équivalent\ de\ pente\ 0dB/décade + 20dB/décade = 20dB/décade \\ j(w) = 0° + 90° \quad équivalent\ à\ 90° \end{cases}$
- $w \in \left[\dfrac{1}{T}; \infty\right]$: $\begin{cases} H_{dB}(w): \quad équivalent\ de\ pente\ -20dB/décade + 20dB/décade = 0dB/décade \\ j(w) = -90° + 90° \quad équivalent\ à\ 0° \end{cases}$

On obtient donc les diagrammes asymptotiques du correcteur par avance de phase :



Reste à déterminer la valeur de l'asymptote horizontale en ∞ notée : X_{dB}

Entre $\frac{1}{T}$ et $\frac{1}{aT}$ il y a $\frac{\left(1/T\right)}{\left(1/aT\right)} = a$ décades. Donc sur une droite de pente +20dB/décade , on « monte » de **20a dB**. Or on a 0dB pour $w = \frac{1}{aT}$, donc on a **20a dB** pour $w = \frac{1}{T}$, c'est à dire **X_{dB}=20a dB**

On illustre bien ici l'intérêt d'avoir un maximum d'équivalent successifs pour « ne pas rater » la plage fréquentielle sur laquelle intervient un tel correcteur.

Questions 4 :

Par raison de symétrie, on voit bien que la phase réelle va présenter un maximum au milieu des deux pulsations propres du système w_{p1} et w_{p2}, c'est à dire puisque les abscisses sont en échelle logarithmique, pour w_m tel que $Logw_m = \frac{1}{2}\left(Logw_{p1} + Logw_{p2}\right)$. C'est à dire pour

$$w_m = \sqrt{w_{p1}w_{p2}} = \sqrt{\frac{1}{aT^2}} = \frac{1}{T\sqrt{a}}$$

$$j(w_m) = \arctan\left(\sqrt{a}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

$\left\|H(jw_m)\right\|_{dB} = 20Log\sqrt{1+a} - 20Log\sqrt{1+\frac{1}{a}} = 20Log\sqrt{a} = 10Loga$ (au milieu des deux asymptotes horizontales)

On obtient donc les diagrammes de Bode asymptotiques et réels ci-dessous pour le correcteur de fonction de transfert : $H(p)=\dfrac{1+p}{1+0{,}1p}$ $\left(T=0{,}1s \quad et \quad a=10\right)$