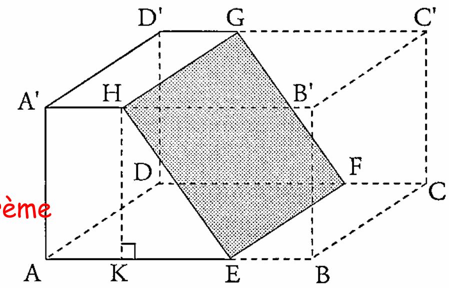
Devoir commun n°4. Correction. 3èmes.

Exercice 1 :

On donne : EF=10cm ; HK=8cm ; KE=5cm.



Le parallélépipède rectangle de la figure ci-contre a été coupé par un plan parallèle à l'arête [BC].

1) Quelle est la nature de la section EFGH ?

La section d'un pavé droit par un plan parallèle à une arête est un rectangle donc EFGH est un rectangle.

2) Calculer HE.

Dans le triangle EHK rectangle en K, d'après le théorème de Pythagore :

$HE^2 = KH^2 + KE^2$

$HE^2 = 8^2 + 5^2$

$HE^2 = 64 + 25$

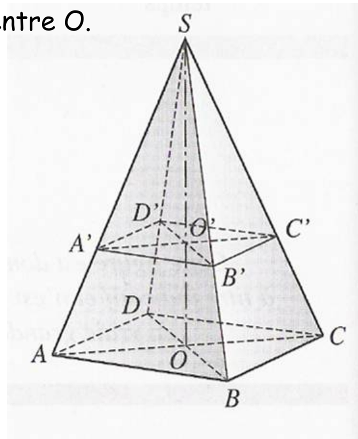
Soit HE = $\sqrt{89} \approx 9{,}4$ cm.

3) Représenter la section EFGH en vraie grandeur.

Le rectangle EFGH a pour longueur EF = 10 cm et pour largeur HE = 9,4 cm.

Exercice 2 :

On considère la pyramide SABCD ci-contre : la base est un rectangle ABCD de centre O.
AB = 40 cm et AD = 30 cm. La hauteur [SO] mesure 81 cm.



1. Calculer en cm^3, le volume de la pyramide SABCD.

   $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire de la base ABCD et h est la hauteur.

   $\mathcal{B}$ = AB × AD = 40 × 30 = 1200 cm² et h = SO = 81 cm

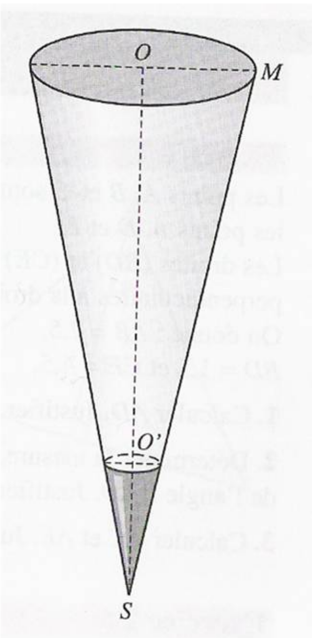
   donc $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times 1200 \times 81 = 32\,400$ cm^3

2. Soit O' le point de [SO] tel que SO' = 54 cm.
   On coupe la pyramide par un plan passant par O' et parallèle à sa base.

   a. Quelle est la nature de la section A'B'C'D' obtenue ?
   La section d'une pyramide par un plan parallèle à sa base est un polygone de même nature que sa base. Ainsi A'B'C'D' est un rectangle.

   b. La pyramide SA'B'C'D' est une réduction de la pyramide SABCD.
   Le coefficient de réduction est $\frac{SO'}{SO} = \frac{54}{81} = \frac{2}{3}$

   c. Quel est le volume de SA'B'C'D' ?
   Dans une réduction de rapport k, les volumes sont multipliés par k^3
   donc $\mathcal{V}(SA'B'C'D') = \mathcal{V}(SABCD) \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 32400 \times \frac{8}{27} = 9600$ cm^3



Exercice 3 : Un cône a pour rayon de base OM = 3 cm et pour hauteur OS = 14 cm.

1. On appelle V le volume de ce cône en cm^3.

   Le volume d'un cône est donné par la formule $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

   donc $V = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 14 = 42\pi$

2. Dans ce cône, on verse du chocolat fondu jusqu'au point O' puis on complète avec de la crème glacée jusqu'au point O. On donne SO' = 3,5 cm.
   Le cône formé par le chocolat fondu, de volume V' en cm^3, est une réduction du cône initial.

   a. Le rapport de réduction est $\frac{SO'}{SO} = \frac{3{,}5}{14} = 0{,}25$.

   b. En déduire le volume V' de chocolat puis le volume V'' de crème glacée.
   Dans une réduction de rapport k, les volumes sont multipliés par k^3
   donc $V' = 42\pi \times 0{,}25^3 = 0{,}65625\pi \approx 2{,}1$ cm^3
   d'où $V'' = 42\pi - 0{,}65625\pi = 41{,}34375\pi \approx 129{,}9$ cm^3

   c. Quel est le pourcentage de chocolat fondu dans ce cône ?

Le pourcentage de chocolat fondu dans ce cône est $\frac{0,65625\pi}{42\pi}$ = 1,5625 %

3.

a. Calculer une valeur arrondie à 10^{-2} près de la longueur SM.

Dans le triangle SOM rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$SM^2 = OM^2 + OS^2$

$SM^2 = 3^2 + 14^2$

$SM^2 = 205$ soit SM = $\sqrt{205} \approx 14,32$ cm.

b. En déduire une valeur arrondie au degré de l'angle $\widehat{OSM}$.

Dans SOM rectangle en O, cos $\widehat{OSM}$ = $\frac{SO}{SM}$ donc cos $\widehat{OSM}$ = $\frac{14}{14,32}$

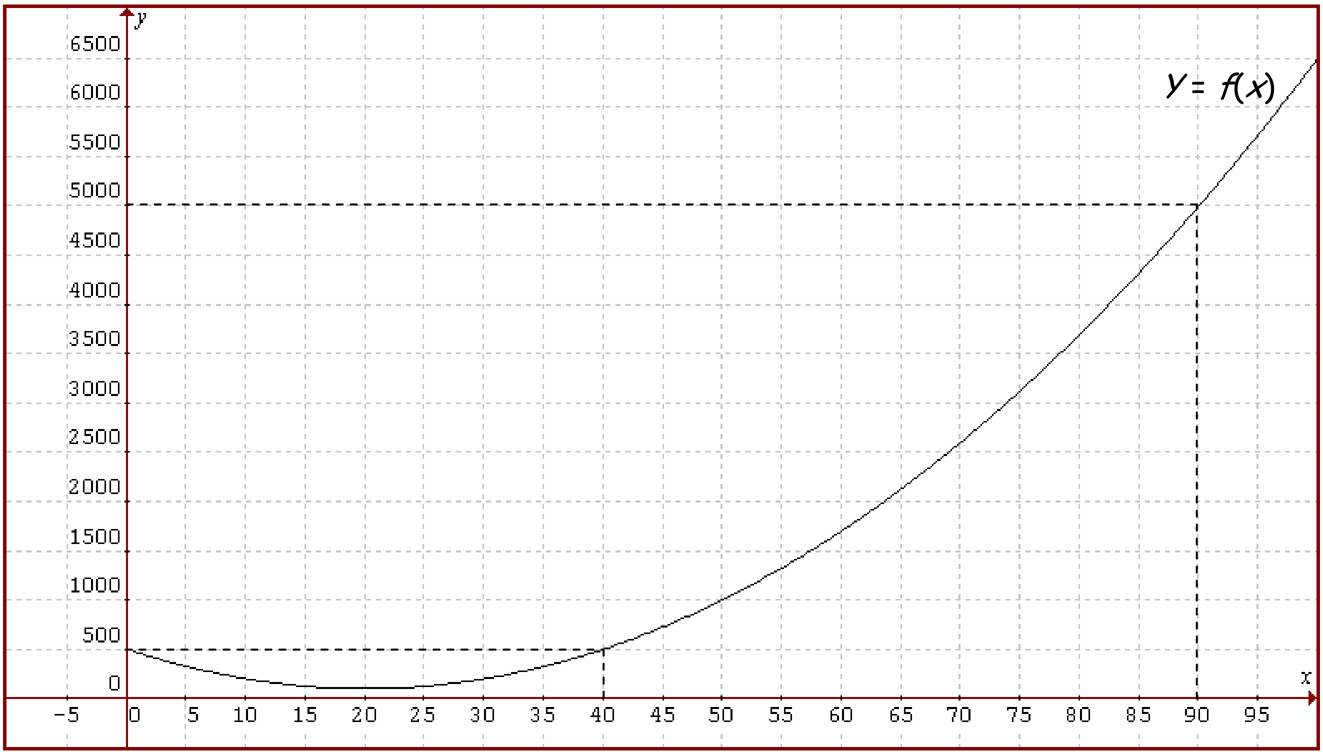
A l'aide de la fonction $\cos^{-1}$ de la calculatrice, on obtient : $\widehat{OSM} \approx 12°$

<u>Exercice 4 :</u> Cocher la bonne réponse.

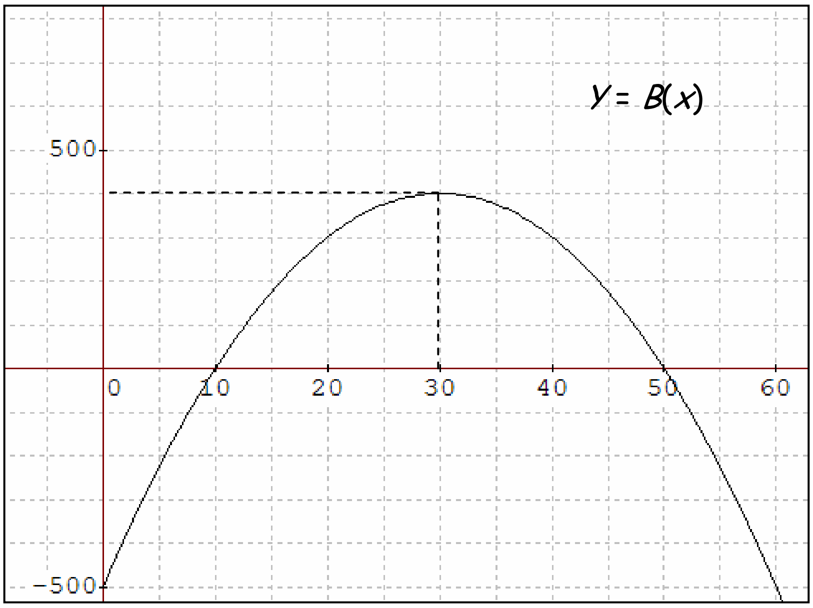
❶	Quel est le volume d'une maquette à l'échelle $\frac{1}{2}$ d'une pyramide de volume 320 cm^3 ?	☐ 160 cm^3	☐ 640 cm^3	☑ 40 cm^3
❷	Quelle est la section d'un cylindre par un plan parallèle à son axe ?	☑ Un rectangle	☐ Un cylindre	☐Un cercle
❸	Quel est le volume en cm^3 d'un cylindre de rayon de base 5cm et de hauteur 10cm ?	☐ 50π	☑ 250π	☐ 500π
❹	Une surface d'aire 25 m^2 subit un agrandissement de rapport 2. Quelle est la nouvelle aire ?	☑ 100 m^2	☐ 50 m^2	☐ 200 m^2

<u>Exercice 5 :</u> Le coût total de fabrication pour x objets dans une entreprise est exprimé en euros par la fonction f dont la courbe ci-dessous est la représentation graphique.

1. A l'aide du graphique, déterminer en laissant visibles les traits de construction :
   a. $f(90) = 5000$
   b. L'image de 40 par f est $f(40) = 500$
   c. Les antécédents de 500 par f sont 0 et 40.
2. En réalité, la fonction f est définie par $f(x) = x^2 - 40x + 500$.
   a. Calculer $f(60)$. Que représente cette valeur ?
   $f(60) = 60^2 - 40 \times 60 + 500 = 1700$. Le coût de production pour 60 objets fabriqués est 1700 euros.
   b. En vous aidant du graphique, pour quelle valeur de x le coût semble-t-il minimum ? Calculer alors ce coût minimum. Le coût semble minimum pour 20 objets fabriqués et ce coût vaut $f(20) = 20^2 - 40 \times 20 + 500 = 100$€
3. Chaque objet fabriqué est vendu 20 €.
   a. Combien rapporte la vente de 60 objets ? Cette valeur est appelée la recette correspondant à la vente de 60 objets.
   La vente de 60 objets rapporte 60 × 20 = 1200 €
   b. Quel bénéfice réalise l'entreprise pour 60 objets fabriqués et vendus ?
   (bénéfice = recette – coûts)
   Le bénéfice réalisé pour 60 objets fabriqués est B = 1200 – 1700 = –500 ce qui signifie que l'entreprise réalise 500 euros de pertes pour 60 objets fabriqués et vendus.
   c. Montrer que le bénéfice $B(x)$ réalisé pour x objets fabriqués et vendus est donné par l'expression
   La recette réalsiée pour x objets vendus est $20x$ donc $B(x) = 20x - f(x)$
   $B(x) = 20x - (x^2 - 40x + 500)$
   $B(x) = 20x - x^2 + 40x - 500$
   d'où $B(x) = -x^2 + 60x - 500$.
   d. D'après le graphique, pour quelle quantité fabriquée et vendue ce bénéfice est-il maximal ?
   Le bénéfice est maximal pour 30 objets fabriqués et vendus.
   e. Combien d'objets cette entreprise peut fabriquer et vendre pour réaliser un profit ?
   L'entreprise réalise un profit lorsque le bénéfice est positif, c'est-à-dire lorsque la courbe représentative de la fonction B est située au dessus de l'axe des abscisses. Ceci est vrai lorsque x est compris entre 10 et 50.



y
6500
6000
5500
5000
4500
4000
3500
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
-5
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
70
75
80
85
90
95
x
$y = f(x)$



$y = B(x)$
500
0
10
20
30
40
50
60
-500