

Majoration

Minoration

(u_n) est majorée par un réel M
si pour tout entier n : $u_n \leq M$

(u_n) est minorée par un réel m
si pour tout entier n : $u_n \geq m$

(u_n) est bornée si elle est à la fois majorée et minorée

Quelques astuces pour démontrer une des propriétés précédentes :

(1) On peut utiliser les variations de la suite !

exemple 1 : Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n^2 + 1}$

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par : $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

Or : $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$, donc $f'(x) < 0$ sur \mathbb{R}_+^*

Par conséquent la fonction f est décroissante sur \mathbb{R}_+

Or $u_n = f(n)$, donc (u_n) est décroissante

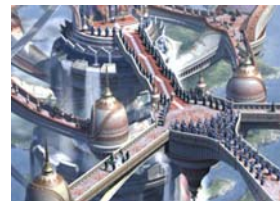
Il en résulte que la suite (u_n) est majorée par son premier terme $u_0 = 1$

Toute suite décroissante est majorée par son premier terme

De même :

Toute suite croissante est
minorée par son premier terme

Autres types de rédaction : travail sur les inégalités



(2) Il peut s'avérer pratique de procéder par composition !

$$\begin{aligned} \text{Pour tout entier } n : n^2 \geq 0 &\Rightarrow n^2 + 1 \geq 1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{n^2 + 1} \leq 1 \\ &\Rightarrow u_n \leq 1 \end{aligned}$$

la fonction inverse étant décroissante sur \mathbb{R}_+

Donc (u_n) majorée par 1



(3) On peut s'intéresser au signe du quotient !

$$\begin{aligned} \text{Pour tout entier } n : n^2 \geq 0 &\Rightarrow n^2 + 1 \geq 1 \\ &\Rightarrow n^2 + 1 > 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{n^2 + 1} > 0 \\ &\Rightarrow u_n > 0 \end{aligned}$$

l'inverse d'un nombre positif est un nombre positif

Donc (u_n) minorée par 1

Toute suite positive est minorée par 0



(4) On résout une inéquation !

exemple 2 : montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{2n+5}{n+3}$ est majorée par 2

$$\begin{aligned} \frac{2n+5}{n+3} \leq 2 &\Leftrightarrow \frac{2n+5}{n+3} - 2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2n+5-2(n+3)}{n+3} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-1}{n+3} \leq 0 \quad : \text{vrai pour tout } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$



Par conséquent, pour tout entier $n : \frac{2n+5}{n+3} \leq 2$, et donc (u_n) majorée par 2.