Barycentre et associativité

Comment démontrer l'alignement de trois points :

Soit ABC un triangle

G le barycentre du système de points pondérés $\{ (A;1), (B;2), (C;2) \}$

H le point défini par : $\overrightarrow{AH} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et I le milieu de $[BC]$.

Démontrer que les droites (AI) et (CH) se coupent en G

méthode :

> On va démontrer que A, I et G sont alignés en utilisant le *théorème d'associativité* du barycentre.
> On fera de même pour les points C, H et G.

- I est le milieu de $[BC]$ donc l'isobarycentre de B et C.

  donc, si G est le barycentre de $(A;1)$, $\underbrace{\mathbf{(B;2),(C;2)}}$ (d'après énoncé)

  alors il l'est aussi de : $(A;1)$, $\mathbf{(I;4)}$: d'après théorème d'associativité

  > on remplace une partie du système initial par le barycentre dit partiel de ce sous-système affecté de la somme des coefficients des points considérés

  

  Et donc $G \in (AI)$ (1)

- $\overrightarrow{AH} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AH} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AH} - 2\left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}\right) = \vec{0}$ d'après Chasles

  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AH} - 2\overrightarrow{HB} = \vec{0}$ d'où H barycentre de $(A;1)$, $(B;2)$

  

  Donc si G est le barycentre de

A	B	C
1	2	2

  et $\boldsymbol{H}$ barycentre de

A	**B**
1	**2**

  Alors G est le barycentre de :

H	C
3	2

  > Le théorème du barycentre partiel permet d'obtenir un système de deux points pondérés équivalent au premier

  Et donc $G \in (HC)$ (2)

- Par conséquent les droites (AI) et (CH) sont concourantes en G d'après (1) et (2)