CCP 2010, Filière PSI, première épreuve de physique

Problème A : Clarinette et saxophone soprano

Equation de propagation d'une onde sonore dans un tube

Bilan de masse sur un système ouvert

A.1

$\mathrm{d}m(t) = \rho(x,t)S(x)\mathrm{d}x = \{\rho_0 + \mu(x,t)\}S(x)\mathrm{d}x$
$\mathrm{d}m(t+\mathrm{d}t) = \rho(x,t+\mathrm{d}t)S(x)\mathrm{d}x = \{\rho_0 + \mu(x,t+\mathrm{d}t)\}S(x)\mathrm{d}x$

A.2

Les masses entrant et sortant sont les flux de masse traversant les surfaces $S(x)$ et $S(x+\mathrm{d}x)$ dans le sens des x croissants multipliés par $\mathrm{d}t$

$$\delta m_e = \mathrm{d}t \iint_{S(x)} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}t \iint \rho(x,t)u(x,t)\vec{e}_x \cdot \mathrm{d}S\vec{e}_x = \rho(x,t)u(x,t)S(x)\mathrm{d}t$$

$$\delta m_s = \mathrm{d}t \iint_{S(x+\mathrm{d}x)} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \rho(x+\mathrm{d}x,t)u(x+\mathrm{d}x,t)S(x+\mathrm{d}x)\mathrm{d}t$$

A.3

Le bilan de masse du système ouvert s'écrit

$$\mathrm{d}m(t+\mathrm{d}t) = \mathrm{d}m(t) + \delta m_e - \delta m_s$$

$$\rho(x,t+\mathrm{d}t)S(x)\mathrm{d}x = \rho(x,t)S(x)\mathrm{d}x + \rho(x,t)u(x,t)S(x)\mathrm{d}t - \rho(x+\mathrm{d}x,t)u(x+\mathrm{d}x,t)S(x+\mathrm{d}x)\mathrm{d}t$$

$$\{\rho(x,t+\mathrm{d}t) - \rho(x,)\mathrm{d}x + \{\rho(x+\mathrm{d}x,t)u(x+\mathrm{d}x,t)S(x+\mathrm{d}x) - \rho(x,t)u(x,t)S(x)\}\mathrm{d}t = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{d}tS(x)\mathrm{d}x + \frac{\partial(\rho S u)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0$$

On utilise $S\rho(x,t) = \rho_0 + \mu(x,t)$ et on simplifie par $\mathrm{d}t\mathrm{d}x$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial(Su)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu S u)}{\partial x} = 0$$

Les deux premiers termes sont d'ordre 1, tandis que le troisième est d'ordre 2 (produit μu). En se limitant à l'ordre 1

$$S\frac{\partial \mu}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial(Su)}{\partial x} = S\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial(Su)}{\partial x} = 0$$

Remarque : l'équation proposée par l'énoncé est correcte, mais peut être simplifiée.

Équation du mouvement

A.4

On calcule les ordres de grandeurs

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \approx \frac{U}{\tau} \ ; \ \left(\vec{u} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\right) \vec{u} \approx \frac{U^2}{L}$$

On déduit la condition à laquelle on peut négliger $\left(\vec{u} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\right) \vec{u}$ devant $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$

$$\frac{U^2}{L} \ll \frac{U}{\tau} \ ; \ U \ll \frac{L}{\tau}$$

A.5

On considère la vitesse u, et les écarts aux grandeurs d'équilibre μ et p comme des infiniment petits d'ordre 1. L'équation d'Euler s'écrit

$$(\rho_0 + \mu) \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\right) \vec{u}\right) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(P_0 + p) = -\frac{\partial p}{\partial t} \vec{e}_x$$

L'accélération convective, d'ordre 2 est négligeable devant l'accélération locale, d'ordre 1. De même $\rho_0 + \mu \approx \rho_0$ en ne gardant que le terme d'ordre principal. En se limitant à l'ordre 1, et en tenant compte du fait que les vecteurs sont selon $\vec{e}_x$

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

A.6

Le coefficient de compressibilité isentropique χ_S s'écrit

$$\chi_S = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_S = \frac{1}{\rho_0 + \mu} \left(\frac{\partial \rho_0 + \mu}{\partial P_0 + p}\right)_S = \frac{1}{\rho_0 + \mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_S$$

À l'ordre 1, μ varie linéairement avec p, puisque $\mu = 0$ lorsque $p = 0$. Par conséquent, en se limitant à l'ordre principal

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_S = \frac{\mu}{p} \ ; \ \chi_S(\rho_0) = \frac{1}{\rho_0} \frac{\mu}{p}$$

soit

$$\mu(x, t) = \rho_0 \chi_S(\rho_0) p(x, t)$$

A.7

On élimine μ entre les équations obtenues aux questions A.3 et A.6

$$S \frac{\partial \mu}{\partial t} = S \rho_0 \chi_S \frac{\partial p}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial (Su)}{\partial x} \ ; \ \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{S \chi_S} \frac{\partial (Su)}{\partial x}$$

On élimine ensuite u entre cette équation et celle obtenue à la question A5, en tenant compte de l'indépendance de $S(x)$ par rapport à t

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{1}{\chi_S S}\frac{\partial(Su)}{\partial t\partial x} = -\frac{1}{\chi_S S}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(Su)}{\partial t}\right) = -\frac{1}{\chi_S S}\frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{1}{\chi_S \rho_0 S}\frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial p}{\partial x}\right)$$

En développant les dérivations

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0 \chi_S}\frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial p}{\partial x}\right) = c^2\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{1}{S}\frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x}\right)$$

où $c^2 = 1/(\rho_0 \chi_S)$.

De même en partant de l'équation d'Euler simplifiée

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial t\partial x} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0 \chi_S}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{S}\frac{\partial(Su)}{\partial x}\right) = c^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{S}\frac{\partial(Su)}{\partial x}\right)$$

Et après développement des dérivées par rapport à x

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{1}{S}\frac{\partial S}{\partial x}\right)u\right) = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{S}\frac{\partial S}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{S}\frac{\partial S}{\partial x}\right)u\right)$$

A.8

Loi du gaz parfait pour une masse m de gaz de masse molaire $\mathcal{M}$

$$P_0 V = nRT_0 = \frac{m}{\mathcal{M}}RT_0 \; ; \; \rho_0 = \frac{m}{V} = \frac{P_0\mathcal{M}}{RT_0}$$

A.9

Loi de Laplace pour une masse m de gaz :

$$PV^\gamma = P\left(\frac{m}{\rho}\right)^\gamma = cste \; ; \; P\rho^{-\gamma} = cste'$$

La différentielle logarithmique de la relation précédente permet de relier les petites variations de P et ρ pour une transformation isentropique

$$\frac{\mathrm{d}P}{P} - \gamma\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = 0$$

D'où l'expression de χ_S à la pression P_0

$$\chi_S = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_S = \frac{1}{\gamma P_0}$$

A.10

D'après la loi du gaz parfait $\rho_0 = P_0\mathcal{M}/(RT_0)$, d'où

$$c^2 = \frac{1}{\rho_0\chi_S} = \gamma\frac{P_0}{\rho_0} = \frac{\gamma RT_0}{\mathcal{M}}$$

Avec les données de l'énoncé

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{\mathcal{M}}} = 343\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

Ondes stationnaires dans une clarinette

A.11

La clarinette est cylindrique, donc $S = cste$, et les termes faisant intervenir les dérivées de S sont nuls dans les équations de propagation précédentes. Elles se simplifient en deux équations de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial p}{\partial x} \ ; \ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial u}{\partial x}$$

c représente dans ce cas la célérité des ondes sonores dans le tube de la clarinette, égale à la célérité des ondes sonores dans l'espace libre.

A.12

Remarque : question hors-programme, dont les résultats sont importants dans la suite de l'énoncé (voir fin du corrigé)

Ceci étant noté, les conditions aux limites sont :

- le tube est fermé en $x = 0$: $u(x = 0, t) = 0$;
- le tube est ouvert en $x = L_{cla}$: $p(x = L_{cla}, t) = 0$ (continuité de la surpression).

A.13

Les dérivées partielles de la solution proposée sont

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = f(x) \cdot \left(-\omega^2 \cos(\omega t)\right) \ ; \ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = f"(x) \cos(\omega t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g(x) \cdot \left(-\omega^2 \sin(\omega t)\right) \ ; \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g"(x) \cos(\omega t)$$

Les équations de d'Alembert pour p et u s'écrivent alors

$$-\omega^2 f(x) \cos(\omega t) = c^2 f"(x) \cos(\omega t) \ ; \ -\omega^2 g(x) \sin(\omega t) = c^2 g"(x) \sin(\omega t)$$

Les fonctions sinusoïdales ne sont pas identiquement nulles et peuvent être simplifiées pour conduire à deux équations différentielles identiques de type oscillateur harmonique

$$f"(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 f(x) = 0 \ ; \ g"(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 g(x) = 0$$

A.14

La solution proposée correspond à $g(x) = u_1 \sin(kx)$. Le report dans l'équation différentielle précédente conduit à la valeur de k

$$-u_1 k^2 \sin(kx) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 u_1 \sin(kx) = 0 \ ; \ k = \pm \frac{\omega}{c}$$

Les deux valeurs opposées de k correspondent à la même solution au signe près, on peut donc choisir la valeur positive de k

$$k = \frac{\omega}{c}$$

En $x = 0$, $\sin(kx) = 0$, donc $u(x = 0, t) = 0$: la condition aux limites est vérifiée.

A.15

On peut utiliser équivalente l'équation de conservation de la masse ou l'équation d'Euler linéarisées. L'équation d'Euler linéarisée s'écrit compte tenu de la forme de u

$$\rho_0 u_1 \sin(kx)\omega\cos(\omega t) = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

qui s'intègre en

$$p(x,t) = u_1\rho_0\frac{\omega}{k}\cos(kx)\cos(\omega t) = \rho_0 c u_1 \cos(kx)\cos(\omega t) + f(t)$$

$f(t)$ ne doit pas modifier la surpression, donc $f(t) = C$, ce qui correspond à une surpression constante, nulle puisqu'au repos $p = 0$.

$$p(x,t) = \rho_0 c u_1 \cos(kx)\cos(\omega t)$$

La condition aux limites en $x = L_{cla}$ est $p(x = L_{cla}, t) = 0$, soit $\cos(kL_{cla}) = 0$. Les valeurs possibles de k vérifient donc la condition

$$kL_{cla} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \ ; \ k = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{L_{cla}} \ ; \ m \text{ entier}$$

Les pulsations possibles sont alors données par la relation

$$\omega_m = k_m c = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi c}{L_{cla}} = 2\pi\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{c}{2L_{cla}} \ ; \ m \text{ entier}$$

Remarque : l'énoncé ne permettait pas aux candidats n'ayant pas obtenu à la question A.12 les conditions aux limites (hors programme) correctes de s'en sortir. D'autant plus que la condition aux limites donnée implicitement par l'énoncé ($u = 0$ en $x = 0$ à la question précédente) est plus facile à trouver que celle portant sur la surpression.

A.16

Comme $f = \omega/2\pi$,

$$f_1 = f_{m=0} = \frac{c}{4L_{cla}} \ ; \ f_{m=1} = \frac{3c}{4L_{cla}} = 3f_1$$

Remarque : il est dommage qu'aucune application numérique ne soit proposée à ce point. Les résultats réels sont-ils tellement différents des résultats théoriques ?

A.17

Le décompte des intervalles entre les Do séparés d'une octave donne $n = 12$ pour un doublement de la fréquence, donc le coefficient multiplicatif entre 2 notes successives vérifie la relation $a^{12} = 2$

$$a = \sqrt[12]{2} = 1{,}059$$

A.18

Pour la clarinette, la fréquence de l'harmonique 1 est le triple de celle du fondamental. En supposant que l'oreille reconnaît les notes de la clarinette en se basant sur la fréquence la plus basse du spectre, l'activation de la clé de douzième permet de passer de la note de départ à une note de fréquence triple, ce qui correspond à un nombre d'intervalle n qui vérifie $3 = a^n$, soit

$$n = \frac{\ln 3}{\ln a} = 12\frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 19$$

Soit en partant du Ré initial :
- 12 intervalles correspondant au passage au Ré une octave au-dessus ;
- 7 intervalles correspondant au passage au La

La note entendue est donc le La situé entre une et deux octaves au-dessus du Ré initial.

Remarque : cette question favorise nettement les musiciens, bien que l'énoncé précise *« Aucune connaissance musicale n'est requise pour traiter ce problème. »* (voir fin du corrigé)

Ondes stationnaires dans un saxophone soprano

A.19

Comme l'angle au sommet du tube est α, et le sommet à l'origine des x, le rayon de la section du saxophone est $r(x) = x\tan(\alpha/2) \approx \alpha x/2$, et l'aire de sa section

$$S(x) = \pi r(x)^2 = \frac{\pi}{4}\alpha^2 x^2$$

A.20

On déduit de la relation précédente l'expression

$$\frac{1}{S}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{x}$$

L'équation de propagation pour p s'écrit alors

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{c^2}{x}\left(x\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2\frac{\partial p}{\partial x}\right)$$

On retrouve la forme de l'énoncé après avoir calculé

$$\frac{\partial^2(xp)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial p}{\partial x} + p\right) = x\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{c^2}{x}\frac{\partial^2(xp)}{\partial x^2}$$

A.21

L'équation précédente s'écrit en la remultipliant par x

$$x\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 (xp)}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 (xp)}{\partial x^2}$$

Soit, avec le changement de variable $\Pi = xp$ proposé, l'équation de d'Alembert en Π

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}$$

- en $x = 0$, $\Pi(x = 0, t) = xp = 0$ indépendamment de la valeur de p ;
- en $x = L_{sax}$ le tube est ouvert donc comme pour la clarinette $p(x = L_{sax}) = 0$, soit $\Pi(x = L_{sax}, t) = 0$.

A.22

La forme sous laquelle on cherche Π, solution de l'équation de d'Alembert est identique à celle de la solution cherchée pour p solution de la même équation de d'Alembert dans la partie précédente, donc par analogie,

$$h"(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 h(x) = 0$$

La solution générale est de la forme

$$h(x) = E\sin(kx) + F\cos(kx)\ ;\ k = \frac{\omega}{c}$$

La condition aux limites en $x = 0$, $\Pi(x = 0, t) = 0$, impose la condition $0 = h(x = 0) = F$, donc

$$h(x) = E\sin(kx)$$

La condition aux limites en $x = L_{sax}$, $\Pi(x = L_{sax}, t) = 0$ impose la condition $0 = h(x = L_{sax}) = E\sin(kL_{sax})$, soit pour une solution non nulle ($E \neq 0$) $\sin(kL_{sax}) = 0$ et

$$kL_{sax} = m\pi\ ;\ k_m = m\frac{\pi}{L_{sax}}\ ;\ \omega_m = k_m c = m\frac{\pi c}{L_{sax}}\ ;\ m \text{ entier}$$

Les pulsations engendrées par le saxophone sont donc de la forme

$$\omega_m = m\frac{\pi c}{L_{sax}}\ ;\ m \text{ entier}$$

A.23

La fréquence du mode fondamental correspond à $m = 1$ ($m = 0$ donne une solution identiquement nulle), celle du premier harmonique à $m = 2$

$$f_1 = \frac{c}{2L_{sax}}\ ;\ f_{harmonique\ 1} = \frac{c}{L_{sax}}$$

Les spectres du saxophone et de la clarinette sont différents, dont leur timbres sont différents, ce qui permet de différencier ces deux instruments. Comme pour la même longueur la fréquence fondamentale du saxophone est double de celle de la clarinette, la clarinette est un instrument qui a taille égale émet des sons plus grave que le saxophone.