Métropole mai 2015

Exercice 1 10 points

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes

Le centre d'approvisionnement d'une chaîne de magasin spécialisée dans le jardinage et l'animalerie vient de recevoir une importante livraison de sable noir et blanc pour la décoration des fonds d'aquarium, de la part d'un nouveau fournisseur.

Ce sable d'une granulométrie importante est déjà conditionné en sacs d'environ 3 litres.

A l'issue d'une série de tests, deux types de défauts sont apparus, notés respectivement c et j.

Le défaut c consiste en la présence d'agrégats calcaires.

Le défaut j consiste en la présence de « grains »de sable jaune.

On dit qu'un sac est défectueux s'il présente au moins un des deux défauts c ou j.

Partie A - Événements indépendants, probabilités conditionnelles

On prélève un sac au hasard dans cette livraison.

On note C, l'évènement « le sac présente le défaut c » et J l'évènement « le sac présente le défaut j ».On suppose que ces deux évènements sont indépendants. Les tests préalables ont permis d'établir que 2% des sacs présentent le défaut c et que 3 % des sacs présentent le défaut j .

1. Donner la valeur des probabilités $P(C)$ et $P(J)$.

2. On note E l'évènement : « le sac présente les deux défauts c et j ». Justifier que $P(E) = 0{,}0006$.

3. On note D l'évènement : « le sac est défectueux ». Justifier que $P(D) = 0{,}0494$.

Dans tout ce qui suit, les probabilités demandées sont à arrondir à 10^{-3}.

Partie B - Loi binomiale

On prélève au hasard 40 sacs pour vérification, le stock étant assez important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On rappelle que la probabilité qu'un sac soit défectueux est 0,0494.

On considère la variable aléatoire X qui à tout prélèvement de 40 sacs associe le nombre de sacs défectueux.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

2. Calculer la probabilité pour que dans un tel prélèvement, il y ait exactement deux sacs défectueux.

3. Calculer la probabilité pour que dans un tel prélèvement, il y ait au moins trois sacs défectueux.

Partie C - Loi normale

On s'intéresse dorénavant au volume d'un sac. La variable aléatoire qui à chaque sac associe sa contenance en litre est notée V . On admet, au vu des résultats de tests effectués, que V suit la loi normale d'espérance 3,15 et d'écart-type 0,1.

1. a. Donner la valeur d'un nombre réel a tel que $p(3{,}15 - a \leq V \leq 3{,}15 + a) = 0{,}95$ à 10^{-2} près

b. Interpréter ce résultat à l'aide d'une phrase.

2. Un sac dont le volume est inférieur à 2,9 litres est rejeté.

a. Calculer, à l'aide de la calculatrice, la probabilité qu'un sac soit rejeté.

b. Sans calcul supplémentaire et en expliquant votre démarche, donner la probabilité qu'un sac ait un volume supérieur à 3,4 litres.

Exercice 2 10 points

L'INSEE fournit les valeurs du taux d'équipement en micro-ordinateur des ménages français pour la période 2004 à 2011, présentées dans le tableau suivant :

Années	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Taux d'équipement : y_i	44,7	49,6	54,3	58,7	62,8	66,7	69,7	73,2

Le taux est estimé en fin d'année. Par exemple, 44,7 % des ménages français étaient équipés en micro-ordinateur fin 2004. À partir de ces données, on souhaite effectuer des prévisions sur le taux d'équipement en micro-ordinateur des ménages français.

Partie A - Ajustement affine

Un nuage de points représentant la série statistique $(x_i ; y_i)$ est donné en annexe 1.

1. a. Un ajustement affine vous semble-t-il indiqué sur la période 2004 à 2011 ? Justifier.

b. Calculer le coefficient de corrélation linéaire, arrondi au millième, de cette série.

Le coefficient calculé confirme-t-il la réponse à la question précédente ? Justifier.

2. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au centième). Tracer cette droite **sur l'annexe à rendre avec la copie**.

3. Quel taux d'équipement (arrondi au dixième) a-t-on avec cet ajustement pour 2012 ?

4. D'après cet ajustement, déterminer par le calcul, à partir de quelle année le taux d'équipement dépassera les 85 %.

5. D'après cet ajustement, déterminer à partir de quelle année le taux d'équipement atteindra-t-il les 100 %. Cela vous semble-t-il réaliste ?

Partie B - Ajustement proposé par un tableur

On décide d'utiliser la fonction « courbe de tendance » du tableur. Parmi les courbes proposées, on choisit celle représentant la fonction f définie sur $[\,1 ; +\infty\,[$ par :

$$f(x) = -0{,}154\,x^2 + 5{,}45\,x + 39{,}36$$

$f(x)$ donne alors une estimation du taux d'équipement pour l'année de rang x. (le rang x est mesuré à partir de l'année 2003 : 2004 est l'année de rang 1).

1. Étude de la fonction f :

a. On admet que la fonction f est dérivable sur $[\,1 ; +\infty\,[$ et on note f' sa fonction dérivée. Calculer $f'(x)$

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[\,1 ; +\infty\,[$

c. En déduire le tableau de variation de cette fonction, en précisant la valeur du maximum et la limite de la fonction f en $+\infty$. Préciser le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

d. Tracer la courbe représentative de f dans le repère de **l'annexe à rendre avec la copie**.

2. À l'aide du graphique, déterminer sur quelle période le taux d'équipement dépassera les 85 %. On laissera apparents les traits de construction permettant de répondre à cette question.

3. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution sur l'intervalle $[\,1\,;+\infty\,[$.

b. Les prévisions à long terme effectués à l'aide de cet ajustement vous semblent-elles réalistes ?

Partie C - Avec une fonction logistique

On sait par expérience que, pour l'étude des taux d'équipement, une fonction logistique est souvent appropriée. Pour l'équipement en micro-ordinateur des ménages français, on décide d'utiliser la fonction g définie sur $[\,1\,;+\infty\,[$ par :

$$g(x) = \frac{100}{1+1{,}47\,\mathrm{e}^{-0{,}17x}}.$$

$g(x)$ donne alors une estimation du taux d'équipement pour l'année de rang x. (le rang x est mesuré à partie de l'année 2003 : 2004 est l'année de rang 1).

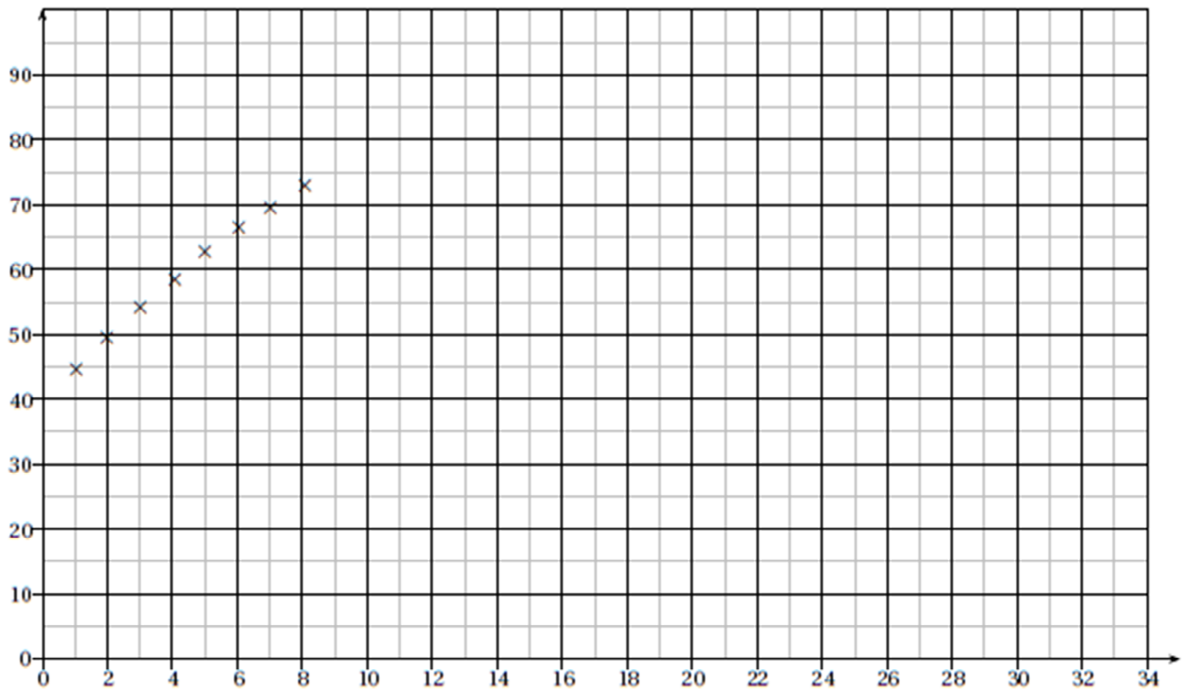
1. a. Sachant que la limite de $\mathrm{e}^{-0{,}17x}$ en $+\infty$ est 0, déterminer la limite de g en $+\infty$.

b. Interpréter graphiquement ce résultat.

c. Que peut-on déduire de ce résultat pour le taux d'équipement en micro-ordinateurs des ménages français ?

2. Avec ce dernier modèle, déterminer le taux d'équipement que l'on peut espérer atteindre en 2016.

Annexe à rendre avec la copie
Exercice 2 Partie A et B



CORRECTION

Exercice 1 10 points

Partie A - Événements indépendants, probabilités conditionnelles

1. 2% des sacs présentent le défaut *c* donc $P(C) = 0{,}02$

3 % des sacs présentent le défaut *j* donc $P(J) = 0{,}03$

Les deux questions suivantes peuvent se traiter soit avec arbre de choix soit sans arbre de choix

Sans arbre de choix :

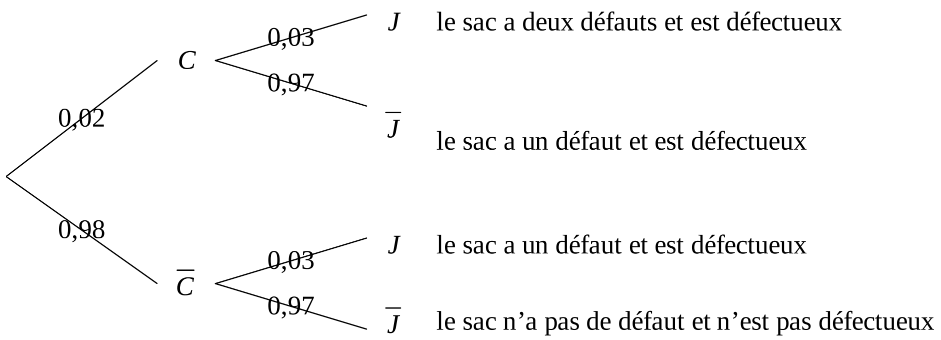
2. L'évènement *E* : « le sac présente les deux défauts *c* et *j* » est l'événement $C \cap J$.

Les évènements *C* et *J* sont indépendants, donc $P(E) = P(C) \times P(J) = 0{,}02 \times 0{,}03$ donc $P(E) = 0{,}0006$.

3. L'évènement *D* : « le sac est défectueux » est l'événement $C \cup J$ donc $P(D) = P(C) + P(J) - P(C \cap J)$

$P(D) = 0{,}02 + 0{,}03 - 0{,}0006 = 0{,}0494$.

Avec arbre de choix :



2. L'évènement *E* : « le sac présente les deux défauts *c* et *j* » a pour probabilité $0{,}02 \times 0{,}03$ donc $P(E) = 0{,}0006$.

3. L'évènement *D* : « le sac est défectueux » a pour probabilité $0{,}02 \times 0{,}03 + 0{,}02 \times 097 + 0{,}98 \times 0{,}03 = 0{,}0494$.

ou encore la probabilité que le sac ne soit pas défectueux est $0{,}98 \times 0{,}97 = 0{,}9506$ donc la probabilité que le sac soit défectueux est égale à $1 - 0{,}9506 = 0{,}0494$.

Partie B - Loi binomiale

1. On a une succession de 40 expériences aléatoires identiques et indépendantes. Chacune d'elles a deux issues :

- réussite : le sac est défectueux ($p = 0{,}0494$)
- échec : le sac n'est pas défectueux ($q = 1 - p = 0{,}9506$)

donc la variable aléatoire *X* suit une loi binomiale de paramètres (40 ; 0,0494)

2. $P(X = 2) = 0{,}27397$

3. $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0{,}6834 = 0{,}3166$

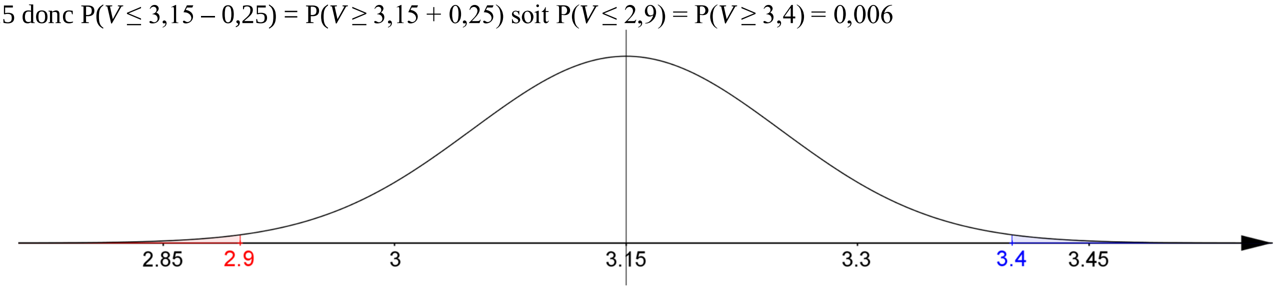
Partie C - Loi normale

1. *a*. $p(3{,}15 - a \leq V \leq 3{,}15 + a) = 0{,}95$ à 10^{-2} près donc $3{,}15 + a = 3{,}314$ donc $a \approx 0{,}16$

***b*.** 95 % des sacs ont un volume compris entre $3{,}15 - 0{,}16$ soit 2,99 et $3{,}15 + 0{,}16$ soit 3,31 litres.

2. *a*. $P(V \leq 2{,}9) = 0{,}006$

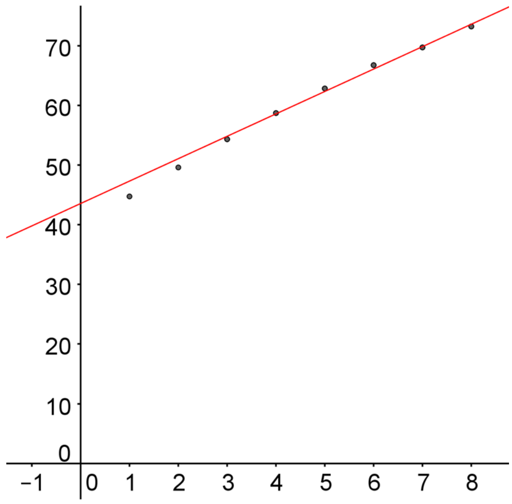
***b*.** La fonction densité de la loi normale d'espérance 3,15 et d'écart-type 0,1 est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 3{,}15$ donc $P(V \leq 3{,}15 - 0{,}25) = P(V \geq 3{,}15 + 0{,}25)$ soit $P(V \leq 2{,}9) = P(V \geq 3{,}4) = 0{,}006$



Exercice 2 10 points

Partie A - Ajustement affine

1. *a.* Les points sont à peu près alignés, un ajustement affine semble indiqué sur la période 2004 à 2011.



b. $r = 0{,}997$, r est très voisin de 1 donc un ajustement affine est indiqué sur la période 2004 à 2011.

2. Une équation de la droite de régression de y en x est $y = 4{,}06\,x + 41{,}68$

Pour tracer cette droite, il faut déterminer deux points de cette droite :

pour $x = 0$, $y = 41{,}68$ donc A(0 ; 41,68) appartient à la droite

pour $x = 8$, $y = 4{,}06 \times 8 + 41{,}68 = 74{,}16$ donc B(8 ; 74,16) appartient à la droite

On place A et B sur le graphique et on trace la droite (AB) qui est la droite de régression de y en x de cette série.

3. En 2012, $x = 9$, donc $y = 4{,}06 \times 9 + 41{,}68 \approx 78{,}3$, le taux d'équipement obtenu avec cet ajustement pour 2012 est de 78,3 %

4. D'après cet ajustement, déterminer par le calcul, à partir de quelle année le taux d'équipement dépassera les 85 %.

5. $4{,}06\,x + 41{,}68 \geq 100 \Leftrightarrow 4{,}06\,x \geq 100 - 41{,}68 \Leftrightarrow 4{,}06\,x \geq 48{,}32 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{48{,}32}{4{,}06}$ soit $x \geq 11{,}9$ donc à partir de 2015, le taux d'équipement dépassera les 100 %, ce qui n'est pas très réaliste, un taux est inférieur ou égal à 100 %.

Années	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Taux d'équipement : y_i	44,7	49,6	54,3	58,7	62,8	66,7	69,7	73,2

Partie B - Ajustement proposé par un tableur

1. *a.* $f'(x) = -0{,}154 \times 2\,x + 5{,}45$ donc $f'(x) = -0{,}308\,x + 5{,}45$

b. $-0{,}308\,x + 5{,}45 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5{,}45}{0{,}308}$ donc la dérivée s'annule pour une valeur x_0 voisine de 17,69

c. $f\left(\dfrac{5{,}45}{0{,}308}\right) \approx 87{,}58$, $f(1) = -0{,}154 + 5{,}45 + 39{,}36 = 44{,}656$

$f(x) = x^2\left(-0{,}154 + \dfrac{5{,}45}{x} + \dfrac{39{,}36}{x^2}\right)$

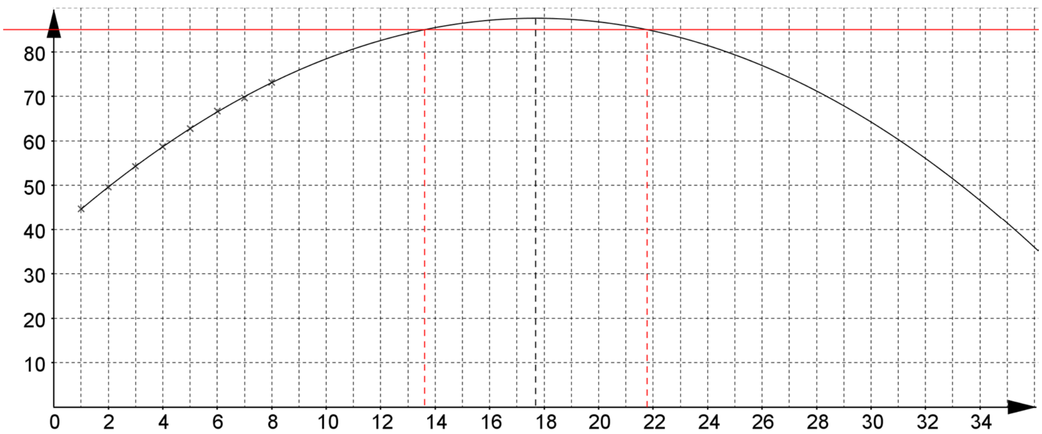
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-0{,}154 + \dfrac{5{,}45}{x} + \dfrac{39{,}36}{x^2}\right) = -0{,}154$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

x	1		$\dfrac{5{,}45}{0{,}308}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	
f	44,656	$\nearrow$	$f\left(\dfrac{5{,}45}{0{,}308}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est $f'(1) = -0{,}508 \times 1^2 + 5{,}45$

$f'(1) = 4{,}942$

d.



2. Entre les années de rang 14 et 21, soit entre 2017 et 2024, le taux d'équipement dépassera les 85 %.

3. *a.* La fonction f est définie dérivable, strictement décroissante sur $[x_0\,;+\infty[$, $f(x_0) > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ donc l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α sur l'intervalle $[x_0\,;+\infty[$.
La fonction f est croissante sur $[1\,;x_0]$ et $f(1) > 0$ donc pour tout x de $[1\,;x_0]$, $f(x) > 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $[1\,;x_0]$.
L'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

b. Le taux d'équipement est nombre positif, or sur $[\alpha\,;+\infty[$ $f(x) \leq 0$ donc les prévisions à long terme effectués à l'aide de cet ajustement ne sont pas réalistes.

Partie C - Avec une fonction logistique

1. *a.* $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,17x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + 1,47\,\mathrm{e}^{-0,17x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 100$

b. La fonction g admet la droite d'équation $y = 100$ pour asymptote.

c. A long terme, le taux d'équipement tend vers 100 %.

2. 2016 – 2003 = 13 donc 2016 est l'année de rang 13, $g(13) = \dfrac{100}{1+1,47\,\mathrm{e}^{-0,17\times 13}}$ soit 86,1 %.