Exemples de limite de somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Exemple 1 :

$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{2^n} + ...$, somme des termes consécutifs de la suite géométrique de terme général $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

On pose $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{2^n}$ avec $n \in \mathbb{N}$

On a $S = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

Or $S_n = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$

Donc $S_n = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 2$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ donc $S = 2$

Exemple 2 :

$S = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + ... + \frac{1}{10^n} + ...$,

$S_n = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + ... + \frac{1}{10^n}$

$$S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}\left(1 - (0,1)^{n+1}\right)$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{10}{9}$ donc $S = \frac{10}{9}$.

Problème d'application de calcul de limite

1. Premier problème

Soit la suite de terme général u_n définie par :

$$u_0 = 5 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$$

1 – Calculer les 5 premiers termes de la suite.
2 – Montrer que la suite de terme général $v_n = u_n - 2$ est une suite géométrique.
3 – En déduire une expression de v_n, puis de u_n en fonction de *n*.
4 – Montrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée.
5 – Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
6 – Exprimer, en fonction de *n*, la somme $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.
7 – La suite (S_n) est-elle convergente ?

2. Deuxième problème

Soit la suite de terme général u_n définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n + 20}{5}$$

1 – Calculer les 5 premiers termes de la suite.
2 – Montrer que la suite de terme général $v_n = u_n - 5$ est une suite géométrique.
3 – En déduire une expression de v_n, puis de u_n en fonction de *n*.
4 – Montrer que la suite (u_n) est croissante et majorée.
5 – Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
6 – Exprimer, en fonction de *n*, la somme $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.
7 – La suite (S_n) est-elle convergente ?

Solutions **Premier problème**

1 – Calculer les 5 premiers termes de la suite.

$u_0 = 5 \quad u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 1 = \frac{1}{2}\times 5 + 1 = \frac{7}{2} \quad u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 1 = \frac{1}{2}\times\frac{7}{2} + 1 = \frac{11}{4}$

$u_3 = \frac{1}{2}u_2 + 1 = \frac{1}{2}\times\frac{11}{4} + 1 = \frac{19}{8} \quad u_4 = \frac{1}{2}u_3 + 1 = \frac{1}{2}\times\frac{19}{8} + 1 = \frac{35}{16}$

2 – Montrer que la suite de terme général $v_n = u_n - 2$ est une suite géométrique.

$v_n = u_n - 2$ donc $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}u_n + 1 - 2 = \frac{1}{2}u_n - 1 = \frac{1}{2}(u_n - 2)$

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{2}(u_n - 2)}{u_n - 2} = \frac{1}{2}$ La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

3 – En déduire une expression de v_n, puis de u_n en fonction de *n*.

(v_n) est donc de la forme $v_0 q^n$. $v_0 = u_0 - 2 = 5 - 2 = 3$ et $q = \frac{1}{2}$ (raison) donc :

$v_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad v_n = \frac{3}{2^n}$

Or $v_n = u_n - 2$ donc $u_n = v_n + 2 = \frac{3}{2^n} + 2$

4 – Montrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée.

$u_n = \frac{3}{2^n} + 2$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{3}{2^n} > 0$ donc $\frac{3}{2^n} + 2 > 2$ donc $u_n > 2$. La suite est minorée par 2.

Cherchons le sens de variation de (u_n). Pour cela, cherchons le signe de $u_{n+1} - u_n$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3}{2^{n+1}} + 2 - \frac{3}{2^n} - 2 = \frac{3}{2^n}\left(\frac{1}{2} - 1\right)$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3}{2^{n+1}} + 2 - \frac{3}{2^n} - 2 = \frac{3}{2^{n+1}} - \frac{3}{2^n} = \frac{3}{2^{n+1}} - \frac{3\times 2}{2^{n+1}} = -\frac{3}{2^{n+1}}$$

Pour tout *n*, on a $2^{n+1} > 0$, donc $-\frac{3}{2^{n+1}} < 0$. Donc pour tout *n*, on a $u_{n+1} - u_n < 0$.

La suite (u_n) est décroissante.

5 – Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

$u_n = \frac{3}{2^n} + 2 = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$ Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{1}{2} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

6 – Exprimer, en fonction de *n*, la somme $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.

$$S_n = \left(2 + \frac{3}{2^0}\right) + \left(2 + \frac{3}{2^1}\right) + \left(2 + \frac{3}{2^2}\right) + ... + \left(2 + \frac{3}{2^n}\right)$$

$$S_n = 2(n+1) + 3\left(\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n}\right) = 2(n+1) + 3\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n}\right)$$

Or $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

Donc $S_n = 2(n+1) + 6\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

7 – La suite (S_n) est-elle convergente ?

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ car $0 < \frac{1}{2} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 1$. $\lim\limits_{n\to+\infty} 2(n+1) = +\infty$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

Solutions :

1 – Calculer les 5 premiers termes de la suite.

$u_0 = 0$

$$u_1 = \frac{0+20}{5} = 4$$

$$u_2 = \frac{4+20}{5} = \frac{24}{5}$$

$$u_3 = \frac{\frac{24}{5}+20}{5} = \frac{124}{25}$$

$$u_4 = \frac{\frac{124}{25}+20}{5} = \frac{624}{125}$$

2 – Montrer que la suite de terme général $v_n = u_n - 5$ est une suite géométrique.

$v_n = u_n - 5$

donc $v_{n+1} = u_{n+1} - 5 = \frac{u_n + 20}{5} - 5 = \frac{u_n - 5}{5}$

$v_{n+1} = \frac{v_n + 5 - 5}{5} = \frac{v_n}{5}$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{5}$, son premier terme est $v_0 = u_0 - 5 = -5$

3 – En déduire une expression de v_n, puis de u_n en fonction de *n*.

(v_n) est donc de la forme $v_0 q^n$: $v_n = -5\left(\frac{1}{5}\right)^n$

Ou encore : $v_n = \frac{-1}{5^{n-1}}$

$v_n = u_n - 5$ donc $u_n = v_n + 5 = v_n = 5 - \frac{1}{5^{n-1}}$

4 – Montrer que la suite (u_n) est croissante et majorée.

Calculons $u_{n+1}-u_n$:

$$u_{n+1}-u_n=5-\frac{1}{5^n}-\left(5-\frac{1}{5^{n-1}}\right)=-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{5^{n-1}}=\frac{-1+5}{5^n}=\frac{4}{5^n}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\frac{4}{5^n}>0$ donc $u_{n+1}-u_n>0$

La suite (u_n) est donc croissante.

De plus, $u_n=5-\frac{1}{5^{n-1}}$ avec $\frac{1}{5^{n-1}}>0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, donc $u_n<5$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

La suite (u_n) est majorée par 5.

5 – Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

$$u_n=5-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}=0$ car $0<\frac{1}{5}<1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=5$.

La suite (u_n) converge vers 5.

6 – Exprimer, en fonction de *n*, la somme $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$.

$$S_n=0+\left(5-\frac{1}{5^0}\right)+\left(5-\frac{1}{5^1}\right)+...+\left(5-\frac{1}{5^{n-1}}\right)$$

$$S_n=5n-\left(\frac{1}{5^0}+\frac{1}{5^1}+...+\frac{1}{5^{n-1}}\right)=5n-\left(1+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{5^{n-1}}\right)$$

$$S_n=5n-\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}}$$

$$S_n=5n-\frac{5}{4}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$$

7 – La suite (S_n) est-elle convergente ?

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n=0$ car $0<\frac{1}{5}<1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\left(\frac{1}{5}\right)^n=1$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 5n=+\infty$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=+\infty$