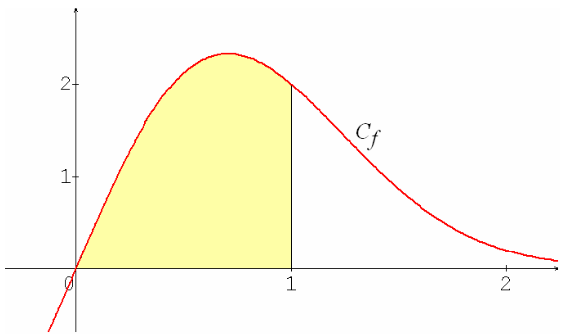
Aires et intégrales

Aire sous la courbe

Soit la fonction f définie sur R par $f(x) = 2x.e^{1-x^2}$ et Cf sa courbe représentative dans le repère orthogonal ci-dessous .

On demande de calculer l'aire sous la courbe entre 0 et 1 .



C'est-à-dire l'aire du domaine D délimité par la courbe Cf, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

Le domaine D est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que : $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

La fonction f étant positive sur $[0;2]$

L'aire A du domaine D est donnée par l'intégrale suivante : $A = \int_0^2 f(x)dx$

On détermine d'abord une primitive F de f sur $[0;2]$.

$$f(x) = 2x.e^{1-x^2} = -\left(-2x.e^{1-x^2}\right)$$

Comme $f = -u'.e^u$, on en déduit que $F = -e^u$

$$F(x) = -e^{1-x^2}$$

On calcule ensuite l'intégrale :

$$A = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 \left(2x.e^{1-x^2}\right)dx$$

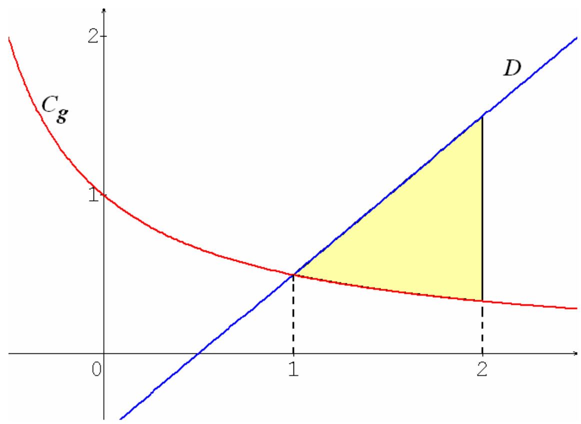
$$= \left[-e^{1-x^2}\right]_0^2 = -e^{-3} - (-e) = -\frac{1}{e^3} + e \quad u.a.$$

Aire d'un domaine entre deux courbes

f et g sont deux fonctions définies sur l'intervalle $]-1;+\infty]$

par : $f(x) = x - \frac{1}{2}$ et $g(x) = \frac{1}{x+1}$

D et Cg sont leurs courbes représentatives dans le repère orthogonal ci-dessous :



On veut calculer l'aire du domaine compris entre la droite D et la courbe Cg sur l'intervalle $[1;2]$, c'est-à-dire l'aire coloriée en jaune.

Sachant que la droite D est située au-dessus de la courbe Cg l'intervalle $[1;2]$

l'aire cherchée est donnée par l'intégrale : $A = \int_0^2 \left(f(x) - g(x) \right) dx$

$$
\begin{aligned}
A &= \int_1^2 \left(x - \frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x - \ln(x+1) \right]_1^2 \\
&= (2 - 1 - \ln 3) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \ln 2 \right) \\
&= 1 - \ln \frac{2}{3} \\
&\simeq 1{,}4 \quad u.a.
\end{aligned}
$$