Signe d'un trinôme du second degré

Un trinôme du second degré $a x^2 + b x + c$
est "toujours" du signe de a
sauf entre ses racines (lorsqu'elles existent).

exemples : étudier le signe des expressions suivantes

signe de $x^2 - 4x + 3$

il faut d'abord calculer Δ et les racines du trinôme

$\Delta = 4 > 0$ donc le trinôme a deux racines $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$
Le trinôme est donc du signe de $a = 1$ à l'extérieur des racines

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$		+	0	$-$	0	+	

signe de a

signe de a

signe de $3x^2 + x + 2$

$\Delta = -23 < 0$ donc le trinôme n'a pas de racine
Le trinôme est donc du signe de $a = 3$, c'est-à-dire positif sur $\mathbb{R}$

ne pas confondre
signe de a et signe de Δ

signe de $-x^2 + 6x - 9$

$\Delta = 0$ donc le trinôme a une seule racine : $x_1 = 3$
Le trinôme est donc du signe de $a = -1$, c'est-à-dire négatif sur $\mathbb{R} - \{3\}$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$-x^2 + 6x - 9$		-	0	-	

Identifier les coefficients d'un polynôme

exemple 1 :

Soit la fonction f définie sur $D = \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x - 4$.
Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout $x \in D$,on ait :

$$f(x) = (x-1)\left(ax^2 + bx + c\right)$$

résolution :

$$\begin{aligned}(x-1)\left(ax^2+bx+c\right) &= ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c \\ &= ax^3 + x^2(b-a) + x(c-b) - c\end{aligned}$$

D'où : $f(x) = (x-1)\left(ax^2+bx+c\right) \Leftrightarrow x^3+3x-4 = ax^3 + x^2(b-a) + x(c-b) - c$

Par identification des coefficients on a : $\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 0 \\ c - b = 3 \\ -c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 4 \end{cases}$

Finalement : $f(x) = (x-1)\left(x^2 + x + 4\right)$