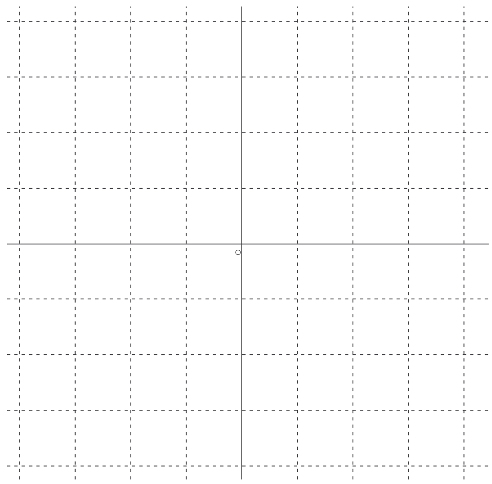
EXERCICES CLASSIQUES
SUR LE NOMBRE DERIVE

<u>EXERCICE 1 :</u> Rapport entre « aspect graphique » et « aspect numérique.

A. On considère la fonction $f(x) = 2x - 1$.



1.a. Reconnaître le type de fonction et tracer sa représentation graphique dans le repère ci-contre.

b. Que dire de la tangente au point d'abscisse 2 ?
En déduire la valeur de $f'(2)$.

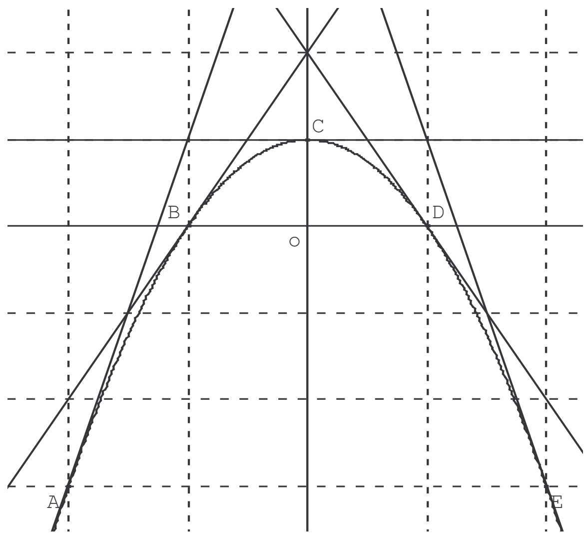
c. Ecrire le taux de variation de f en 2.
Ce résultat confirme-t-il le b. ?

d. Que dire de la tangente en un point quelconque d'abscisse a ?
En déduire la valeur de $f'(a)$.

e. Ecrire le taux de variation de f en a.
Ce résultat confirme-t-il le d. ?

2. Généraliser ce résultat à toutes les fonctions de ce type.

B. On a tracé dans le repère ci-contre la courbe de la fonction $f(x) = -x^2 + 1$ ainsi que cinq tangentes.



1.a. En utilisant le graphique, compléter le tableau :

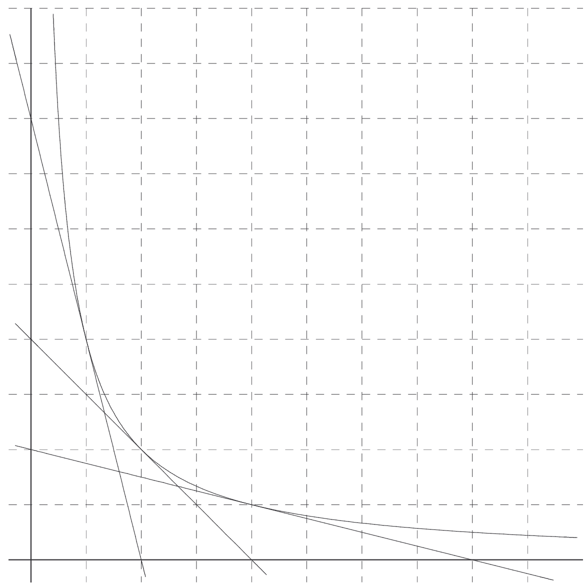
x	-2	-1	0	1	2
$f'(x)$					

b. En observant le tableau, formuler une conjecture concernant la valeur de $f'(x)$ pour tout nombre x.

2.a. En utilisant le taux de variation de f, retrouver par le calcul les nombres dérivée du tableau ci-dessus.

b. En vous inspirant de la question 2.a , démontrer votre conjecture formulée en 1.b.

C. On a tracé dans le repère ci-contre la courbe de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ ainsi que trois tangentes en $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ et $x = 2$.



1.a. En utilisant le graphique, compléter le tableau :

x	$-\frac{1}{2}$	1	2
$f'(x)$			

b. En observant le tableau, formuler une conjecture concernant la valeur de $f'(a)$ pour tout nombre a.

2. a. En utilisant le taux de variation de f, retrouver par le calcul les nombres dérivée du tableau ci-dessus.

b. En vous inspirant de la question 2.a, démontrer votre conjecture formulée en 1.b.

EXERCICE 2 : Calculs de nombres dérivés.

A. On considère la fonction $f(x) = x^2 - 5x$ sur R.

1. En utilisant le taux de variation de f en 1, calculer $f'(1)$.
2. Même question en –1.
3. Même question en un nombre réel a quelconque.
4. Vérifier la validité de votre résultat à l'aide des question 1. et 2.

B. On considère la fonction $f(x) = 2x^2 - 1$ sur R.

1. Calculer $f'(0)$ et $f'(-2)$.
2. Déterminer $f'(a)$ pour tout nombre réel a.
3. Vérifier la validité de votre résultat à l'aide de la question 1.

C. On considère la fonction $f(x) = \frac{-2}{x}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer $f'(1)$ *et* $f'(-2)$ *(…penser à la réduire au dénominateur commun …)*
3. Déterminer $f'(a)$ pour tout nombre réel a de l'ensemble de définition de f.
4. Vérifier la validité de votre résultat à l'aide de la question 1.

D. On considère la fonction $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer $f'(1)$, $f'(-1)$ *et* $f'(0)$.
3. Déterminer $f'(a)$ pour tout nombre réel a de l'ensemble de définition de f.
4. Vérifier la validité de votre résultat à l'aide de la question 1.

E. On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

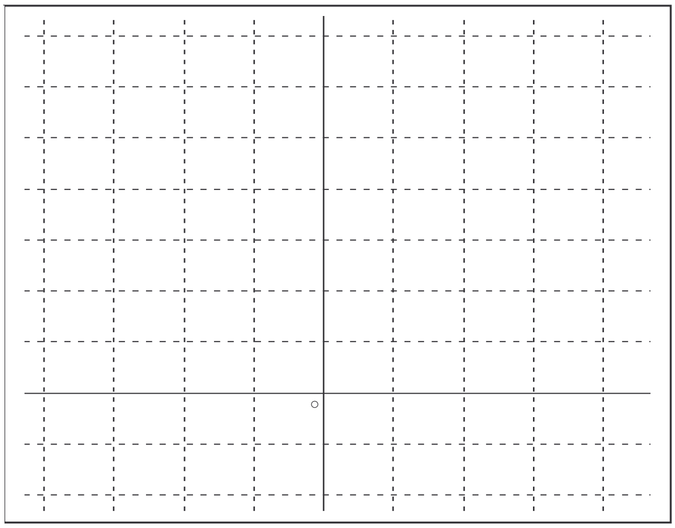
1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer $f'(1)$, $f'(-1)$ *et* $f'(0)$.
3. Déterminer $f'(a)$ pour tout nombre réel a.
4. Vérifier la validité de votre résultat à l'aide de la question 1.

F. On considère la fonction $f(x) = \sqrt{x+1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer $f'(0)$, $f'(3)$ *et* $f'(2)$. *(…penser à l'expression conjuguée …)*
3. Etudier le cas de $x = -1$.
4. Déterminer $f'(a)$ pour tout nombre réel a de l'ensemble de définition de f sauf –1.
5. Vérifier la validité de votre résultat à l'aide de la question 1.

<u>EXERCICE 3 :</u> Tangentes et approximations affines.

A. On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}$ sur *R*.



1. Compléter le tableau de valeurs :

x	*-2*	*-1,5*	*-1*	*-0,5*	*0*	*0,5*	*1*	*1,5*	*2*
f(x)									

2. Tracer le courbe de la fonction *f* sur [-2 ; 2] dans le repère ci-contre (unité : 2 carreaux)

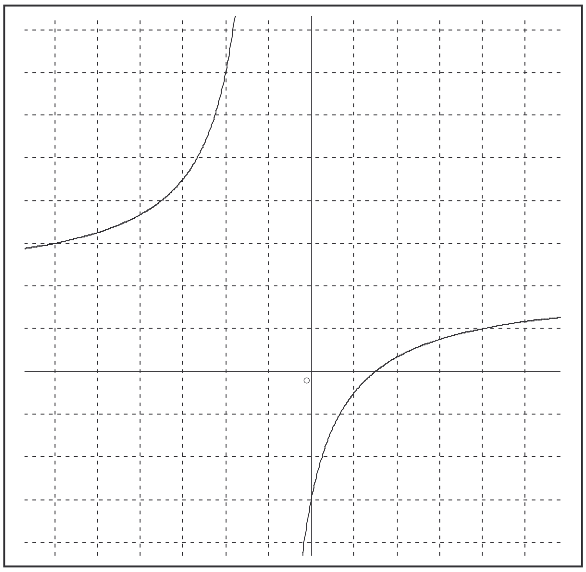
3. Calculer *f'(1)* .
Qu'en déduire pour la tangente au point d'abscisse 1 ?
Tracer cette tangente.

4. Calculer *f'(-1)* . Tracer la tangente correspondante.

5. Déterminer l'équation de la tangente en $x = 0$. Tracer cette tangente.

6. Déterminer l'approximation affine de *f* en $x = 2$. En déduire une valeur approchée de *f(2,01)*.

B. On considère la fonction $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$
ainsi que sa courbe sur [-6 ; 4]



1. Déterminer l'ensemble de définition de *f*.

2. Calculer *f'(-2)* . Tracer la tangente correspondante.

3. Calculer *f'(-6)* . Tracer la tangente correspondante.

4. Déterminer l'équation de la tangente en $x = 0$.
Tracer cette tangente.

5. Déterminer l'approximation affine de *f* en $x = 4$.
En déduire une valeur approchée de *f(3,98)*.

6. Tracer la tangente à la courbe au point d'intersection avec l'axe des abscisses.

EXERCICE 4 : Quelques Approximations affines classiques.

1. On considère la fonction $f(x)=(1+x)^2$

a. Déterminer son approximation affine en *0*.

b. Exprimer l'erreur commise en fonction de x (écrire $f(x)=1+2x+\varepsilon(x)$)

c. Donner des valeurs approchées de $1{,}02^2$ et de 0.98^2. Evaluer l'erreur commise.

2. On considère la fonction $g(x)=(1+x)^3$

a. Déterminer son approximation affine en *0*. (On utilisera : $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$)

b. Exprimer l'erreur commise en fonction de x écrire $f(x)=1+3x+\varepsilon(x)$

c. En déduire des valeurs approchées de $1{,}02^3$ et de 0.98^3. Evaluer l'erreur commise

3. On considère la fonction $h(x)=(1+x)^4$

a. Déterminer son approximation affine en *0*. (On utilisera : $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$)

b. Exprimer l'erreur commise en fonction de x écrire $f(x)=1+4x+\varepsilon(x)$

c. En déduire des valeur approchée de $1{,}02^4$ et de 0.98^4. Evaluer l'erreur commise

EXERCICE 5 : Applications.

1. La population d'une ville de 50 000 habitants augmente de 2 % par an.

a. Calculer sa population au bout d'1 an, 2 ans, 3 ans, et 4 ans.

b. Calculer dans chaque cas le pourcentage d'augmentation. Que constatez-vous ?

Durée	Départ	1 an	2 ans	3ans	4 ans
Population	50 000				
Augmentation					
Pourcentage d'augmentation.					

c. Démontrer qu'une augmentation de 2 % d'une quantité revient à multiplier cette quantité par 1,02.

d. En déduire que 2 augmentations successives de 2 % d'une quantité revient à la multiplier par $1{,}02^2$.

e. Généraliser ce résultat à 3 et 4 augmentations.

f. Expliquer vos constatations faites en **b.** en utilisant les fonctions f, g *et* h.

2. Reprendre ces questions pour une diminution de 2 % par an.

Durée	Départ	1 an	2 ans	3ans	4 ans
Population	50 000				
Augmentation					
Pourcentage d'augmentation.					

3. Une population de bactéries croît de 40 % par période.

a. Reprendre ces questions dans ce cas.