

Exercice 1

Rappel

G barycentre des points pondérés (A;a) et (B;b) avec $a + b \neq 0$

G est défini par $a\vec{GA} + b\vec{GB} = \vec{0}$ et $\vec{AG} = \frac{b}{a+b}\vec{AB}$

G est sur le segment [AB] (G entre A et B) si les deux coefficients a et b sont de même signe

G est plus près de A que de B si $|a| > |b|$

pour tout point M du plan

si $a + b \neq 0$ alors $a\vec{MA} + b\vec{MB} = (a+b)\vec{MG}$

si $a + b = 0$ alors $\vec{V} = a\vec{MA} + b\vec{MB}$ est un vecteur constant t (c'est - à - dire

indépendant du point M et $\vec{V} = a\vec{MA} + b\vec{MB} = b\vec{AB} = -a\vec{AB}$)

Introduisons le barycentre des points (A,2) et (B,-1)

le barycentre G vérifie $2\vec{GA} - \vec{GB} = \vec{0}$

En utilisant la relation de Chasles pour les vecteurs

$$2\vec{GA} - (\vec{GA} + \vec{AB}) = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \vec{GA} = \vec{AB}$$

G est donc le symétrique de B par rapport à A

donc G est en O.

les deux coefficients 2 et -1 sont de signes contraires

donc le barycentre G est à l'extérieur du segment [AB]

G est du côté du point dont la valeur absolue des poids pondérés

est la plus grande puisque $2 > |-1|$ donc du côté du point A et

à l'extérieur du segment [AB]

Introduisons le barycentre G

$$\|2\vec{MA} - \vec{MB}\| = \|2(\vec{MG} + \vec{GA}) - (\vec{MG} + \vec{GB})\| = \|\vec{MG} + 2\vec{GA} - \vec{GB}\| = \|\vec{MG}\| = L$$

donc M appartient au cercle de centre G (ou O) et de rayon L.

Exercice 2

Rappel barycentre de 3 points

G barycentre des points pondérés (A;a), (B;b), (C;c) avec $a + b + c \neq 0$

G est défini par $a\vec{GA} + b\vec{GB} + c\vec{GC} = \vec{0}$

associativité

Si $a + b + c \neq 0$, on introduit le point H barycentre partiel de (A;a), (B;b) avec $a + b \neq 0$

alors le barycentre G est aussi le barycentre de (H;a + b), (C;c)

De plus pour tout point M du plan

si $a + b + c \neq 0$ alors $a\vec{MA} + b\vec{MB} + c\vec{MC} = (a + b + c)\vec{MG}$

si $a + b = 0$ alors $\vec{V} = a\vec{MA} + b\vec{MB} + c\vec{MC}$ est un vecteur constant (c'est - à - dire indépendant du point M)

1. le point G vérifie l'égalité vectorielle $\vec{GA} + \vec{GB} + 2\vec{GC} = \vec{0}$

Le barycentre partiel H des points pondérés (A;1), (B;1) est

le milieu du segment [AB] puisque les 2 coefficients sont égaux.

Le barycentre G des points pondérés (A;1), (B;1), (C;2) est grâce à

l'associativité le barycentre des points pondérés (H;2), (C;2) c'est

donc le milieu G du segment [CH].

2. Utilisons la relation de Chasles pour les vecteurs

$$\begin{aligned} \|\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}\| &= \left\| (\vec{MG} + \vec{GA}) + (\vec{MG} + \vec{GB}) + 2(\vec{MG} + \vec{GC}) \right\| \\ &= \left\| 4\vec{MG} + (\vec{GA} + \vec{GB} + 2\vec{GC}) \right\| = 4\|\vec{MG}\| = 1 \end{aligned}$$

$$\text{ou encore } MG = \frac{1}{4}$$

Le point M ∈ au cercle de centre G et de rayon $\frac{1}{4}$.

Exercice 4

Les exercices 4 et 5 sont à la page suivante

RappelG barycentre des points pondérés (A;a) et (B;b) avec $a + b \neq 0$ G est défini par $a\vec{GA} + b\vec{GB} = \vec{0}$ et $\vec{AG} = \frac{b}{a+b}\vec{AB}$

G est sur le segment [AB] (G entre A et B) si les deux coefficients a et b sont de même signe

G est plus près de A que de B si $|a| > |b|$ 1. $AB = 8$

G barycentre des points pondérés (A;5) et (B;3)

G est défini par $5\vec{GA} + 3\vec{GB} = \vec{0}$

En utilisant la relation de Chasles pour les vecteurs

 $5\vec{GA} + 3(\vec{GA} + \vec{AB}) = \vec{0}$ ou $8\vec{GA} + 3\vec{AB} = \vec{0}$ soit $8\vec{AG} = 3\vec{AB}$ ou $\vec{AG} = \frac{3}{8}\vec{AB}$ G est sur le segment [AB] tel que $AG = 3$

2. H barycentre des points pondérés (A;11) et (B;-3)

H est défini par $11\vec{HA} - 3\vec{HB} = \vec{0}$ et $\vec{AH} = \frac{-3}{8}\vec{AB}$

H est à l'extérieur du segment [AB] puisque les deux coefficients

 $a = 11$ et $b = -3$ sont de signes contrairesH est plus près de A que de B car $|a| = 11 > |b| = |-3| = 3$ puisque $AH = 3$ alors A est le milieu de GH3. $\vec{u} = 5\vec{MA} + 3\vec{MB}$

utilisons encore la relation de Chasles

 $\vec{u} = 5(\vec{MG} + \vec{GA}) + 3(\vec{MG} + \vec{GB}) = 8\vec{MG} + 5\vec{GA} + 3\vec{GB} = 8\vec{MG}$ puisque par définition $5\vec{GA} + 3\vec{GB} = \vec{0}$ $\vec{u} = 5\vec{MA} + 3\vec{MB} = 8\vec{MG}$ signifie bien que $\vec{u} = 5\vec{MA} + 3\vec{MB}$ est colinéaire à \vec{MG}

De même

 $\vec{v} = 11\vec{MA} - 3\vec{MB} = 11(\vec{MH} + \vec{HA}) - 3(\vec{MH} + \vec{HB}) = 8\vec{MH} + 11\vec{HA} - 3\vec{HB} = 8\vec{MH}$ $\vec{v} = 11\vec{MA} - 3\vec{MB} = 8\vec{MH}$ signifie bien que $\vec{v} = 11\vec{MA} - 3\vec{MB}$ est colinéaire à \vec{MH} 4. Déterminer l'ensemble E_1 des points M du plan vérifiant

$$\|5\vec{MA} + 3\vec{MB}\| = \|11\vec{MA} - 3\vec{MB}\| \Leftrightarrow 8\|\vec{MG}\| = 8\|\vec{MH}\|$$

L'ensemble E_1 est la médiatrice du segment [GH] donc la perpendiculaire à AB passant par A

Exercice 5

Pour tout point M du plan, on pose

$$\vec{V} = 2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}$$

1. Il n'existe pas de barycentre pour le triplet (A,2),(B,-1),(C,-1) puisque la somme des coefficients est nulle

$$\vec{V} = 2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}$$

le point G est le centre de gravité ou isobarycentre du triangle ABC alors $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

$$\vec{V} = 2(\vec{MG} + \vec{GA}) - (\vec{MG} + \vec{GB}) - (\vec{MG} + \vec{GC}) = 2\vec{GA} - (\vec{GB} + \vec{GC}) = 2\vec{GA} - (-\vec{GA}) = 3\vec{GA}$$

expression ne dépendant pas du point M donc \vec{V} est un vecteur indépendant du point M.

$$2. \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = (\vec{MG} + \vec{GA}) + (\vec{MG} + \vec{GB}) + (\vec{MG} + \vec{GC}) = 3\vec{MG}$$

$$\text{et } 2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} = 3\vec{GA}$$

$$\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\| \Leftrightarrow 3\|\vec{MG}\| = 3\|\vec{GA}\| \quad \|\vec{MG}\| = \|\vec{GA}\|$$

l'ensemble des points M de E tel que $\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\| \Leftrightarrow GM = GA$

est le cercle de centre G et de rayon GA (ce cercle de centre G passe par A).

Exercice 3

1. il n'y a pas de barycentre pour les points pondérés

(A;1),(B;1) et (C;-2) puisque la somme des coefficients (1+1-2=0) est nulle.

Ecrivons la relation de Chasles pour \vec{MB} et \vec{MC} en introduisant le point A.

$$\vec{u}(M) = \vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC} = \vec{MA} + (\vec{MA} + \vec{AB}) - 2(\vec{MA} + \vec{AC}) = \vec{AB} - 2\vec{AC}$$

$\vec{u}(M) = \vec{AB} - 2\vec{AC}$ est indépendant de M donc $\vec{u}(M)$ est un vecteur constant.

2. Puisque $\vec{u}(M) = \vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}$ est un vecteur constant

alors $\vec{u}(M) = \vec{u}(A) = \vec{u}(B) = \vec{u}(C)$ soit $\vec{AB} - 2\vec{AC} = \vec{BA} - 2\vec{BC} = \vec{CA} + \vec{CB}$

Exercice 6

1. H barycentre de (A,1) et (B,3) alors $\vec{HA} + 3\vec{HB} = \vec{0}$

soit en utilisant la relation de Chasles $\vec{HA} + 3(\vec{HA} + \vec{AB}) = \vec{0}$

ou $4\vec{HA} + 3\vec{AB} = \vec{0}$ soit $\vec{AH} = \frac{3}{4}\vec{AB}$

H est donc affecté du poids pondéré 4.

2. G barycentre de (H,4) et (C,5) alors $4\vec{GH} + 5\vec{GC} = \vec{0}$

soit en utilisant la relation de Chasles $4\vec{GH} + 4(\vec{GH} + \vec{HC}) = \vec{0}$

ou $9\vec{GH} + 5\vec{HC} = \vec{0}$ soit $\vec{HG} = \frac{5}{9}\vec{HC}$

3. Calculons $\vec{GA} + 3\vec{GB} = (\vec{GH} + \vec{HA}) + 3(\vec{GH} + \vec{HB}) = 4\vec{GH} + \vec{HA} + 3\vec{HB} = 4\vec{GH}$

puisque $\vec{HA} + 3\vec{HB} = \vec{0}$ (d'après 1)

et donc G est colinéaire à \vec{GH}

$\vec{GA} + 3\vec{GB} + 5\vec{GC} = 4\vec{GH} + 5\vec{GC} = \vec{0}$

puisque $4\vec{GH} + 5\vec{GC} = \vec{0}$ (d'après 2)

G est le barycentre de (A,1), (B,3) et (C,5)

Rappel: associativité pour la construction du barycentre

Soit G le barycentre de (A,a), (B;b), (C,c) avec $a + b + c \neq 0$

Si $a + b \neq 0$, en notant H le barycentre de (A,a), (B,b) alors

G est le barycentre de (H,a + b), (C,c)

4. G est le barycentre de (A,1), (B,3) et (C,5)

Grace à l'unicité et l'associativité du barycentre,

on construit H barycentre partiel de (A,1) et (B,3)

H est alors affecté du coefficient $1 + 3 = 4$

et G est le barycentre de (H,4) et (C,5)

De même K barycentre partiel de (A,1) et (C,5)

G est alors affecté du coefficient $1 + 5 = 6$

donc G est aussi le barycentre de (B,3) et (K,6)

Remarque:

Si L est le barycentre partiel de (B,3), (C,5)

alors les droites (CH), (BK), (AL) sont concourantes au point G

Exercice 7**Rappel**

G barycentre des points pondérés (A;a) et (B;b) avec $a + b \neq 0$

G est défini par $a\vec{GA} + b\vec{GB} = \vec{0}$ et $\vec{AG} = \frac{b}{a+b}\vec{AB}$

G est sur le segment [AB] (G entre A et B) si les deux coefficients a et b sont de même signe

G est plus près de A que de B si $|a| > |b|$

De plus

G barycentre des points pondérés (A;a) et (B;b) avec $a + b \neq 0$

Commutativité

G barycentre des points pondérés (A;a) et (B;b)

et G est aussi barycentre des points pondérés (B;b) et (A;a)

Homogénéité

Pour tout réel k non nul

G barycentre des points pondérés (A;a) et (B;b)

et G est aussi barycentre des points pondérés (A;ka) et (B;kb)

1. Soit H tel que $\vec{BH} = \frac{1}{3}\vec{BC}$ et H barycentre de (B, b), (C, c)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$$

donc H barycentre de (B,2), (C,1) mais aussi grâce à la propriété d'homogénéité H barycentre de (B, 4), (C, 2)

2. le point G est le barycentre des points pondérés (A,3), (B,4) et (C,2).

et H le point soit le barycentre de (B,4) et (C,2).

alors G est le barycentre de (A,3) et (H,6) et les points A, G et H sont alignés.

de plus $\vec{AG} = \frac{6}{9}\vec{AH} = \frac{2}{3}\vec{AH}$

3. Déterminer l'ensemble $E = \left\{ M \in P \mid \vec{u} = 3\vec{MA} + 2\vec{MB} + 4\vec{MC} \text{ soit colinéaire à } \vec{AB} \right\}$.

$$\vec{u} = 3(\vec{MG} + \vec{GA}) + 2(\vec{MG} + \vec{GB}) + 4(\vec{MG} + \vec{GC})$$

$$= 9\vec{MG} + 3\vec{GA} + 2\vec{GB} + 4\vec{GC} = 9\vec{MG}$$

$\vec{u} = 9\vec{MG}$ colinéaire à $\vec{AB} \Leftrightarrow M \in E$: droite parallèle à la droite (AB)

et passant par le point G.

Exercice 8

$$1. \text{ Si } \vec{CJ} = \frac{3}{4}\vec{CA} \text{ alors } \begin{cases} b = 3 \\ a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$$

et J est le barycentre de (C,1) et (A,3)

$$\text{Si } \vec{AK} = \frac{2}{5}\vec{AB} \text{ alors } \begin{cases} b = 2 \\ a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$$

et K est le barycentre de (A,3) et (B,2)

2. Trois points non alignés A,B et C

Soit G le barycentre de (A,3),(B,2) et (C,1)

en utilisant l'associativité du barycentre

si I est le barycentre de (B,2), (C,1) le point G est sur la droite (AI)

si J est le barycentre de (C,1), (A,3) le point G est sur la droite (BJ)

si K est le barycentre de (A,3), (B,2) le point G est sur la droite (CK)

et

les droites (AI), (BJ) et (C,K) sont concourantes au point G

barycentre de (A,3),(B,2) et (C,1)

Exercice 9

1. Le système $\{(A,-1);(B,1);(C,1);(D,-1)\}$ n'admet pas de barycentre
puisque la somme des coefficients $-1+1+1-1=0$

$$2. \text{ Soit } \vec{V} = \vec{MB} - \vec{MA} + \vec{MC} - \vec{MD}$$

$$\vec{V} = (\vec{MA} + \vec{AB}) - \vec{MA} + (\vec{MA} + \vec{AC}) - (\vec{MA} + \vec{AD})$$

$$\vec{V} = \vec{AB} + \vec{AC} - \vec{AD} = \vec{AB} + (\vec{AB} + \vec{BC}) - \vec{AD} = 2\vec{AB} + \vec{BC} - \vec{AD}$$

$$\vec{V} = 2\vec{AB} \text{ car } \vec{BC} - \vec{AD} = \vec{0} \text{ puisque } ABCD \text{ est un carré.}$$

3. le point G est le barycentre des points pondérés $\{(B,1);(C,-4);(D,1)\}$

la somme des coefficients est différente de 0 donc le barycentre G existe

$$\text{et vérifie } \vec{GB} - 4\vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$$

$$\text{soit } (\vec{GO} + \vec{OB}) - 4(\vec{GO} + \vec{OC}) + (\vec{GO} + \vec{OD}) = \vec{0}$$

$$-2\vec{GO} + (\vec{OB} + \vec{OD}) - 4\vec{OC} = \vec{0}$$

puisque

$$\vec{OB} + \vec{OD} = \vec{0} \text{ car } O \text{ est le milieu de } [BD] \text{ et } \vec{OG} = 2\vec{OC}$$

donc G est le symétrique de O par rapport à C.

4. Construire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left\| \vec{MB} - 4\vec{MC} + \vec{MD} \right\| = \left\| \vec{MB} - \vec{MA} + \vec{MC} - \vec{MD} \right\|$$

Exercice 10

Soit ABCD un rectangle tel que $AB=6$ et $BC=10$

1. le barycentre G des points pondérés (A,1), (B,2), (C,3) et (D,6) existe car $1+2+3+6=12$

Soit H barycentre partiel de (A,1), (B,2) alors $\vec{AH} = \frac{2}{3} \vec{AB}$ donc $AH=4$

K barycentre partiel de (H,3), (C,3) alors K est le milieu de HC

G barycentre de (K,6), (D,6) alors G est le milieu de DK

On a aussi dans le repère orthonormé direct (A; \vec{AD} , \vec{AB})

$$x_G = \frac{x_A + 2x_B + 3x_C + 6x_D}{1+2+3+6} = \frac{30+60}{12} = \frac{15}{2}$$

$$y_G = \frac{y_A + 2y_B + 3y_C + 6y_D}{1+2+3+6} = \frac{12+18}{12} = \frac{5}{2}$$

2. Déterminer l'ensemble $E = \left\{ M \in \text{plan} \mid \left\| \vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC} + 6\vec{MD} \right\| = 3 \right\}$.

$$\begin{aligned} \vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC} + 6\vec{MD} &= (\vec{MG} + \vec{GA}) + 2(\vec{MG} + \vec{GB}) + 3(\vec{MG} + \vec{GC}) + 6(\vec{MG} + \vec{GD}) \\ &= 12\vec{MG} + \vec{GA} + 2\vec{GB} + 3\vec{GC} + 6\vec{GD} = 12\vec{MG} \end{aligned}$$

E est donc défini par $\left\| 12\vec{MG} \right\| = 3$ soit $MG = \frac{1}{4}$

M ∈ au cercle de centre G et de rayon $\frac{1}{4}$.

Exercice 11

1. Soit G barycentre de (A,1), (B,1) et (C,2).

On cherche donc le point G appartenant au plan ABC tel que:

$$\vec{GA} + \vec{GB} + 2\vec{GC} = \vec{0} \quad (1)$$

On cherche d'abord le barycentre des points (A,1) et (B,1). Les deux coefficients étant égaux donc le barycentre I de ces deux points est le milieu de [AB] et il est affecté du coefficient égal à la somme des coefficients, donc I est affecté du coefficient 2.

Puis, on cherche le barycentre des points (I,2) et (C,2). Le barycentre G est donc le milieu de [CI] et G est affecté du coefficient 4 et de plus G appartient à la droite (CI)

2. Ecrivons la relation de Chasles pour les vecteurs en introduisant le point G

$$\|\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = \|(\vec{MG} + \vec{GA}) + (\vec{MG} + \vec{GB}) + 2(\vec{MG} + \vec{GC})\| = \|4\vec{MG} + (\vec{GA} + \vec{GB} + 2\vec{GC})\| = 4\|\vec{MG}\|$$

en tenant compte de la relation (1)

$$\|\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = AB \Leftrightarrow 4\|\vec{MG}\| = 4MG = AB$$

et E est le cercle de centre G et de rayon $\frac{AB}{4}$

3. Rappel: si H est le barycentre des points (A,a) et (C,b)

$$\text{alors } \vec{AH} = \frac{b}{a+b} \vec{AC}$$

$$\text{Si H est tel que } \vec{AH} = \frac{2}{3} \vec{AC} \text{ alors } \begin{cases} b = 2 \\ a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

donc H est le barycentre de (A,1) et (C,2)

Puisque G est le barycentre de (A,1),(B,1) et (C,2), en tenant compte de l'associativité du barycentre, G est aussi le barycentre de (H,3) et (B,1) et G appartient à la droite (BH) et donc les points B,G et H sont alignés.

Exercice 12**Rappel**

G barycentre des points pondérés (A;a) et (B;b) avec $a + b \neq 0$

G est défini par $a\vec{GA} + b\vec{GB} = \vec{0}$ et on déduit alors $\vec{AG} = \frac{b}{a+b}\vec{AB}$

G est affecté du coefficient de pondération $a + b$

Soit les deux systèmes de points pondérés:

$$S_1 = \{(A,-2);(B,1)\} \quad \text{et} \quad S_2 = \{(A,3);(C,1)\}$$

1. Le système S_1 admet un barycentre G_1 puisque la somme des coefficients pondérés $-2 + 1 = -1 \neq 0$

G_1 vérifie $-2\vec{G_1A} + \vec{G_1B} = \vec{0}$ et donc $\vec{AG_1} = -\vec{AB}$
 G_1 est le symétrique de B par rapport à A.

Le système S_2 admet un barycentre G_2 puisque la somme des coefficients pondérés $3 + 1 = 4 \neq 0$

G_2 vérifie $3\vec{G_2A} + \vec{G_2C} = \vec{0}$ et donc $\vec{AG_2} = \frac{1}{4}\vec{AC}$

2. Soit G l'isobarycentre des points A, B et C.

G est le barycentre de (A,1),(B,1) et (C,1), le point G vérifie $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

G est aussi le barycentre de (A,-2),(B,1),(A,3)(C,1) et d'après l'associativité de $(G_1,-1)$ et $(G_2,4)$.

3. Les points G_1, G_2 et G sont alignés et l'on a $\vec{G_1G} = \frac{4}{3}\vec{G_1G_2}$

Remarque: on a aussi

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$$

et donc

$$(\vec{GG_1} + \vec{G_1G_2} + \vec{G_2A}) + (\vec{GG_1} + \vec{G_1G_2} + \vec{G_2B}) + (\vec{GG_1} + \vec{G_1G_2} + \vec{G_2C}) = \vec{0}$$

$$3\vec{GG_1} + 3\vec{G_1G_2} + \vec{G_2A} + \vec{G_2B} - 3\vec{G_2A} = \vec{0}$$

$$3\vec{GG_1} + 3\vec{G_1G_2} - 2(\vec{G_2G_1} + \vec{G_1A}) + (\vec{G_2G_1} + \vec{G_1B}) = \vec{0}$$

$$\text{et } 3\vec{GG_1} = -4\vec{G_1G_2}$$

$$\text{soit } \vec{G_1G} = \frac{4}{3}\vec{G_1G_2}$$

Exercice 13

Soit A et B deux points tels que $AB = 5$

1. Construire G barycentre des points pondérés (A;2) et (B;3)

La somme des coefficients $2+3 \neq 0$, il existe un unique point G barycentre des points pondérés (A;2) et (B;3) qui vérifie

$$2\vec{GA} + 3\vec{GB} = \vec{0}$$

soit en utilisant la relation de Chasles $2\vec{GA} + 3(\vec{GA} + \vec{AB}) = \vec{0}$

soit $5\vec{GA} + 3\vec{AB} = \vec{0}$ ou encore $\vec{AG} = \frac{3}{5}\vec{AB}$.

Conséquence: pour tout point M du plan

$$2\vec{MA} + 3\vec{MB} = 2(\vec{MG} + \vec{GA}) + 3(\vec{MG} + \vec{GB}) = 5\vec{MG} + 2\vec{GA} + 3\vec{GB} = 5\vec{MG}$$

2. Construire G' barycentre des points pondérés (A;-1) et (B;6)

La somme des coefficients $-1+6 \neq 0$, il existe un unique point G' barycentre des points pondérés (A;-1) et (B;6) qui vérifie $-\vec{G'A} + 6\vec{G'B} = \vec{0}$

soit en utilisant la relation de Chasles $-\vec{G'A} + 6(\vec{G'A} + \vec{AB}) = \vec{0}$

soit $5\vec{GA} + 6\vec{AB} = \vec{0}$ ou encore $\vec{AG}' = \frac{6}{5}\vec{AB}$.

et pour tout point M du plan $-\vec{MA} + 6\vec{MB} = 5\vec{MG}'$

3. Déterminer et construire l'ensemble $E_1 = \left(M \in \text{plan} \mid \left\| 2\vec{MA} + 3\vec{MB} \right\| = 10 \right)$

$$2\vec{MA} + 3\vec{MB} = 5\vec{MG}$$

$$M \in E_1 \Leftrightarrow \left\| 5\vec{MG} \right\| = 10 \Leftrightarrow 5MG = 10 \Leftrightarrow MG = 2$$

E_1 est le cercle de centre G et de rayon 2

4. Déterminer et construire l'ensemble $E_2 = \left(M \in \text{plan} \mid \left\| 2\vec{MA} + 3\vec{MB} \right\| = \left\| -\vec{MA} + 6\vec{MB} \right\| \right)$

puisque $2\vec{MA} + 3\vec{MB} = 5\vec{MG}$ et $-\vec{MA} + 6\vec{MB} = 5\vec{MG}'$

$$\text{alors } M \in E_2 \Leftrightarrow \left\| 2\vec{MA} + 3\vec{MB} \right\| = \left\| -\vec{MA} + 6\vec{MB} \right\| \Leftrightarrow \left\| 5\vec{MG} \right\| = \left\| 5\vec{MG}' \right\| \Leftrightarrow \left\| \vec{MG} \right\| = \left\| \vec{MG}' \right\| \Leftrightarrow MG = MG'$$

donc E_2 est la médiatrice du segment $[GG']$ donc la perpendiculaire à AB passant par B.

5. Déterminer et construire l'ensemble

$$E_3 = \left(M \in \text{plan} \mid (2\vec{MA} + 3\vec{MB}) \cdot (-\vec{MA} + 6\vec{MB}) = 0 \right)$$

$$M \in E_3 \Leftrightarrow (2\vec{MA} + 3\vec{MB}) \cdot (-\vec{MA} + 6\vec{MB}) = 0 \Leftrightarrow (5\vec{MG}) \cdot (5\vec{MG}') \Leftrightarrow \vec{MG} \cdot \vec{MG}' = 0$$

E_3 est le cercle de diamètre $[GG']$

Exercice 14

Soit ABCD un rectangle tel que $AB=5$ et $BC=9$

1. le point G est le barycentre des points pondérés (A;1), (B;1), (C;1) et (D;2)

soit H le barycentre partiel (ou isobarycentre) des points pondérés (A;1), (B;1), (C;1)

alors en utilisant l'associativité G est le barycentre des points pondérés (H;3), (D;2)

$$\text{donc } \vec{HG} = \frac{2}{5} \vec{HD}$$

On a aussi dans le repère orthonormé direct $(A; \vec{AD}, \vec{AB})$

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C + 2x_D}{1+1+1+2} = \frac{9+18}{5} = \frac{27}{5}$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C + 2y_D}{1+1+1+2} = \frac{5+5}{5} = 2$$

2. Soit I le milieu de [BC], alors I est le barycentre des points s (B;1),(C;1)

et I est affecté du coefficient 2

et K le point vérifiant $\vec{AK} = \frac{2}{3} \vec{AD}$ donc K est le barycentre des points (A;1),(D;2)

et K est affecté du coefficient 3

G barycentre des points (A;1),(B;1),(C;1) et (D;2)

par associativité G est le barycentre de (I;2),(K;3)

donc les points I, G et K sont alignés

$$3. \vec{u} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + 2\vec{MD} =$$

$$(\vec{MG} + \vec{GA}) + (\vec{MG} + \vec{GB}) + (\vec{MG} + \vec{GC}) + 2(\vec{MG} + \vec{GD}) = 5\vec{MG}$$

donc \vec{u} est colinéaire à $\vec{BC} \Leftrightarrow M \in E$ droite parallèle

à la droite (BC) passant par le point G.