COMPLEXES

Exercice 1 Asie Juin – 99

1 : Pour tout nombre complexe Z, on pose $P(Z) = Z^4 - 1$

a **:** Factoriser P(Z).

b **:** En déduire les solutions dans l'ensemble C des complexes de l'équation P(Z) = 0.

c **:** Déduire de la question précédente les solutions dans C de l'équation d'inconnue z : $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$

2 : ***a*** **:** Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$). Unité graphique 5m.

Placer les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = -2\ ,\ b = -\frac{1}{5} - \frac{3i}{5} \text{ et } c - \frac{1}{5} + \frac{3i}{5}\ .$$

b **:** Démontrer que les points O , A , B et C sont situés sur un cercle , que l'on déterminera.

3 : Placer le point D d'affixe $d = -0{,}5$.

Exprimer sous forme trigonométrique le nombre complexe z' défini par : $z' = \frac{a-c}{d-c}$

En déduire le rapport $\frac{\text{CA}}{\text{CD}}$.

Quelle autre conséquence géométrique peut-on tirer de l'expression de z' ?

Correction

Exercice 2 Polynésie Juin – 99

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$). Unité graphique = 2cm.

C désigne l'ensemble des nombres complexes.

1 : Résoudre, dans C, l'équation (E) : $z^3 - 8 = 0$.

2 : On considère dans le plan (P) les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = -1 + i\sqrt{3}\ ,\ z_B = 2,\ z_C = -1 - i\sqrt{3}\ .$$

a **:** Ecrire z_A et z_C sous forme trigonométrique.

b **:** Placer les points A , B et C.

c **:** Déterminer la nature du triangle ABC.

3 : On considère l'application f du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = e^{\frac{2i\pi}{3}} z$.

a **:** Caractériser géométriquement l'application f

b **:** Déterminer les images des points A et C par f . En déduire l'image de la droite (AC) par f .

Correction

Exercice 3 Guadeloupe – Guyane – Martinique Juin – 99

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).

On considère le point A d'affixe 1 et, pour α appartenant à I = [0 ; π[, le point M d'affixe $z = e^{i\alpha}$.

On désigne par P le point d'affixe $1 + z$ et par Q le point d'affixe z^2.

1 : A partir du point M, donner une construction géométrique du point P et une construction géométrique du point Q. Les point , A, M, P et Q seront placés sur une même figure.

2 : Déterminer l'ensemble des point P, pour α appartenant à I. Tracer cet ensemble sur la figure précédente.

3 : Soit S le point d'affixe $1 + z + z^2$, où z désigne toujours l'affixe du point M. Construire S, en justifiant la construction.

4 : Dans le ces où S est différent de 0, tracer la droite (OS). Quelle conjecture apparaît, relativement au point M?

Démontrer que le nombre $\frac{1+z+z^2}{z}$ est réel, quel que soit α appartenant à I.

Conclure sur la conjecture précédente.

Correction

Exercice 4 : Pondichéry Mai 1999

1 : Résoudre dans C l'équation $z^2 + 2\sqrt{2}\,z + 4 = 0$.

On désignera par z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et par z_2 l'autre solution.

2 : ***a*** **:** Déterminer le module et un argument de chacune de ces solutions.

b **:** Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$.

3 : Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) (unité : 1cm),

on considère le point M_1 d'affixe $\sqrt{2}\,(1 + i)$, le point M_2 d'affixe $\sqrt{2}\,(1 - i)$, et le point A d'affixe $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

a **:** Déterminer l'affixe du point M_3, image de M_2 par l'homothétie h de centre A et de rapport – 3.

b **:** Déterminer l'affixe du point M_4, image de M_2 par la rotation r de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

c **:** Placer dans le même repère les points A, M_1, M_2, M_3 et M_4.

d **:** Calculer $\frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1}$.

e **:** Soit I le milieu du segment [M_3 M_4] et M_5 le symétrique de M_1 par rapport à I. Montrer que les points M_1, M_2, M_5 et M_4 forment un carré.

Correction

Exercice 5 : France – Métropolitaine Juin 1999

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).

1 : Résoudre dans C l'équation (1) : $\frac{z-2}{z-1} = z$.

On donnera le module et un argument de chaque solution.

2 : Résoudre dans C l'équation (2) : $\frac{z-2}{z-1} = i$.

On donnera la solution sous forme algébrique.

3 : Soit M, A et B les points d'affixes respectives : z , 1 et 2. On suppose que M est distinct des points A et B.

a **:** Interpréter géométriquement le module et un argument de $\frac{z-2}{z-1}$.

b **:** Retrouver géométriquement la solution de (2).

4 : ***a*** **:** Montrer, à l'aide d'une interprétation géométrique, que toute solution de l'équation dans C : $\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n = i$ où n désigne un entier naturel non nul donné, a pour partie réelle $\frac{3}{2}$.

b **:** Résoudre dans C l'équation (3) : $\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^2 = i$. On cherchera les solutions sous forme algébrique.

Correction

Exercice 6 : Amérique du Nord Juin – 99

Le plan orienté est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$, l'unité graphique étant 4 cm.

On considère les points A et B d'affixes respectives : $a = 1$ et $b = e^{\frac{i\pi}{12}}$. Le point C est l'image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$.

1 : *a* : Calculer l'affixe *c* du point C sous forme exponentielle puis sous forme trigonométrique.

***b* :** Soit I le milieu du segment [AC]. Calculer l'affixe du point I.

***c* :** Faire une figure.

2 : *a* : Prouver que les droites (OI) et (OB) sont confondues.

***b* :** Ecrire sous forme trigonométrique l'affixe du point I.

***c* :** Déterminer $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$. Les valeurs exactes sont exigées.

On indique que $\sqrt{4\sqrt{3}+2} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$.

Correction

Exercice 7 :D'après France Métropolitaine Septembre – 98

1 : On considère le polynôme P défini par :

$$P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16.$$

***a* :** Montrer que l'équation (E) : "$P(z) = 0$ " admet une solution dans $\mathbb{N}$, ensemble des entiers naturels.

***b* :** Donner alors une factorisation de $P(z)$ puis résoudre l'équation (E) dans **C**, ensemble des nombres complexes.

On appelle *a* la solution entière de (E), *b* la solution de (E) dont la partie imaginaire est positive et *c* la solution de (E) dont la partie imaginaire est négative.

***c* :** Que peut-on dire de *b* et *c*?

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$, un point M est défini par son affixe *z*. On note alors M(*z*).

2 : Soient les trois points A(*a*) , B(*b*) et C(*c*).

***a* :** Calculer les distance AB , AC et BC. Que peut-on en déduire concernant le triangle ABC?

***b* :** Montrer qu'il existe une rotation r_1 de centre A telle que r_1(B) = C. Donner l'angle α de cette rotation.

***c* :** Soit I le milieu du segment [AB]. Quelle est l'image J de I par r_1? Que peut-on dire des droites (BC) et (I J)?

3 : On définit les deux rotations r_2 et r_3 de centre respectifs B et C et d'angle α.

***a* :** Déterminer l'image de B par (r_3 o r_2 o r_1), composée des trois rotations.

***b* :** Que peut-on dire de (r_3 o r_2 o r_1) ?

Exercice 8 :D'après Asie Juin – 97

On considère le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.

K est le point de coordonnées (1 ; 0) et L celui de coordonnées (0 ; 1)

1 : Soit le polynôme P tel que, pour tout *z* de **C**, ensemble des nombres complexes, $P(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$

Calculer P(2). Donner alors une factorisation de P(*z*) puis résoudre l'équation P(*z*) = 0 dans **C**.

2 : On note *a* la solution de l'équation ci-dessus dont la partie imaginaire est strictement positive et *b* le conjugué de *a*.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives *a* , *b* et 2. Soit I le milieu de [AB].

***a* :** Montrer qu'il existe une rotation *r* de centre O telle que R(K) = L. Quel est son angle?

***b* :** Déterminer l'affixe du point *r*(B). En déduire la nature du quadrilatère OACB.

3 : Soit *f* l'application de (P), privé du point C, dans (P) qui, au point M d'affixe *z* ($z \neq 2$), associe le point M' d'affixe *z'* définie par : $z' = \dfrac{z-(1+i)}{z-2}$.

***a* :** Déterminer *f* (A) et *f* (B). Déterminer le point E tel que *f* (E) = C.

***b* :** Quelles distances représentent les réels $|z - (1+i)|$ et $|z - 2|$?

En déduire que, si M appartient à la médiatrice de [AC] alors M' appartient à un cercle dont on donnera le centre et le rayon.

Exercice 9 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$, les point A, B, C, D ont pour affixe respectives $3 + i$,$7 - i$, $-1 - 7i$,$8 - 4i$.

1) Quelle est la nature du triangle ABC?

2) Démontrer que A,B,C,D sont sur un même cercle.

3) A tout point M d'affixe *z*, avec *z* non nul, on associe le point M' d'affixe *z'* tel que $z' = \dfrac{10}{z}$.

Ecrire sous forme algébrique les affixe *a'*, *b'*, *c'* des points A',B',C' (respectivement associés A, B et C).

Vérifier que $\dfrac{c'-a'}{b'-a'} = 2$.

En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$

Que peut-on en déduire pour les points A',B',C'

Correction

Exercice 10 :

Le plan complexe (*P*) est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.

A tout point M d'affixe $z = x + iy$, on associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ tel que : $z' = \dfrac{z-i}{z+i}$.

On définit ainsi une transformation T de (*P*) dans (*P*).

1. Pour quelle valeur de *z*, *z'* n'est-il pas défini?

Vérifier que $z' = 1 + \dfrac{-2i}{z+i}$.

Montrer que T est la composée de transformations simples.

Expliciter toutes ces transformations.

Quel est le point n'ayant pas d'antécédent par T?

Quelle est l'image par T de l'axe des ordonnées? de l'axe de abscisses?

On définit les transformations T_1 par $z' = \dfrac{1}{z}$ et T_2 par $z' = -2iz$.

2. *a* : Quelle l'image du cercle C_1 de centre O_1 (1;0) et de rayon R = 1 par T_1?

b : Quelle l'image de la droite D_1 d'équation $y = x + 1$ par T_1 ?

c : Quelle est l'image du cercle C_2 de centre O_2 (– 0,5 ; – 0,5) et de rayon $R = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ par T_2?

d : Quelle est l'image de la droite D_2 d'équation $x = 0{,}5$ par T_2?

En utilisant les questions précédentes, déduire l'image du cercle C de centre Ω (1; – 1) et de rayon R = 1 par T.

De même, en déduire l'image de la droite D d'équation $y = x$ par T.

3. On pose $z = 1 - i + e^{i\theta}$, où *q* appartient à $[0\ ;\ 2\pi]$.

a : *z'* est-il défini pour toutes les valeurs de θ ?

b : Calculer $|z - (1 - i)|$. En déduire la courbe décrite par M quand θ varie de 0 à 2π.

c : Déterminer l'ensemble des points M' quand θ varie de

0 à 2 π.
Correction

Complexes et Transformations du Plan :

Dans tous les exercices, le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).
Un point M d'affixe z a donc pour coordonnées (x ; y) avec $z = x + i\,y$, x et y réel.
On utilise alors la notation M(z) pour indiquer que z est l'affixe de M..
Si f est une fonction de (P) dans (P), on identifiera f (M) et f (z) pour simplifier la rédaction.

Exercice 11 : Asie (juin 2001)
Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).
On appelle f l'application qui à tout point M d'affixe z (z différent de – 1) du plan associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \dfrac{-i\,z-2}{z+1}$.
Soient A, B et C les points d'affixe respectives :
$$a = -1 \,,\, b = 2\,i,\, c = -\,i$$
Soit C' l'image du point C par f .
Donner l'affixe c' du point C' sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
Calculer l'affixe d du point D ayant pour image le point D' d'affixe $d' = \dfrac{1}{2}$.
Pour tout nombre complexe z différent de – 1 on note p le module de (z + 1), (c'est à dire $|z + 1| = p$) et p' le module de $z' + i$ (c'est à dire $|z' + i| = p'$)
a) Démontrer que, pour tout nombre complexe z différent de – 1, on a : $p \times p' = \sqrt{5}$.
b) Si le point M appartient au cercle (C) de centre A de rayon 2 montrer alors que M' = f (M)appartient au cercle (C') dont on précisera le centre et le rayon.
Pour tout nombre complexe z différent de – 1 , on considère le nombre complexe μ tel que : $\mu = \dfrac{z-2\,i}{z+1}$.
a) Interpréter géométriquement l'argument du nombre complexe μ .
b) Montrer que $z' = -\,i\,\mu$.
c) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z telle que z' soit un réel non nul.
d) Vérifier que le point D appartient aux ensembles (Γ) et (C)
Représenter les ensembles (Γ) , (C) et (C') en prenant 4 cm pour unité graphique.
Correction

Exercice 12 :
1 a) On pose . Démontrer que $1 + j + j^2 = 0$
b) Soit un triangle MNP du plan complexe. On note m, n, p les affixes des points M,N,P
Démontrer l'équivalence des propositions suivantes :
- le triangle est équilatéral direct
- $\dfrac{n-p}{m-n} = j$
- $m + j\,n + j^2\,n = 0$.

2) Soit un triangle direct ABC.
On construit à l'extérieur de celui-ci ,les triangles directs BDC, CEA, AFB.
On note d , e , et f les affixes des points D, E , et F.
Démontrer que le triangle DEF a même centre de gravité que le triangle ABC
3) Soient G, H, K les centres de gravité respectifs des triangles BDC , CEA , AFB .
On note g, h et k les affixes des points G , H et K.
a) Démontrer que le triangle GHK est équilatéral direct.
b) Démontrer que le triangle GHK a même centre de gravité que le triangle ABC.

Exercice 13 :
On définit l'application f de (P) dans (P) qui à M(z) associe M'(z') tel que : $z' = i\,z + 2$.
a : Montrer que f possède un point fixe A. On note z_a l'affixe de A.
b : Vérifiez que $z_a = 1 + i$.
c : Montrez alors que : $z' - z_a = i(z - z_a)$
d : Quelle est la nature de l'application f ?

Exercice 14 :
On définit f de (P) vers (P) par : "f (M) = M' si et seulement si, $z' = \dfrac{z+i}{z-2}$ où M(z) et M'(z') "
a : Quel est le seul point A de (P) à ne pas avoir d'image par f ?
b : Quel est le seul point B de (P) à ne pas avoir d'antécédent par f ?
c : Quelle est l'image de l'axe (O ;v) par f ?
d : Quelle est l'image du cercle de centre O et de rayon R = 1 par f ?
e : Quel est l'ensemble des points M(z) tels que z', affixe de f (M) , soit réel ?
Correction

Exercice 15 :
On définit f de (P) vers (P) par "f (M) = M' si et seulement si $z' = z^2$, où M(z) et M'(z')".
a : Déterminer f (A) , f (B) et f (C) avec A(1 + i) , B(1 – i) et C(3 + 4 i).
b : Déterminer les antécédents de E(– 5) par f .
c : Déterminer l'ensemble des points M tels que f (M) soit sur l'axe (O ; $\vec{u}$).
d : Déterminer l'ensemble des points M tels que f (M) soit sur l'axe (O ; $\vec{v}$).
e : Déterminer l'ensemble des points M tels que f (M) soit sur le cercle de centre O et de rayon R = 4.
f : Déterminer l'ensemble des points M tels que f (M) soit sur le cercle de centre E(1) et de rayon R' = 4.

Exercice 16 :
f est la similitude directe de centre A(1 ; 2) , d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et de rapport $k = -2$.
a : Pour M point du plan d'affixe z, déterminer l'affixe z' de f (M).
b : Déterminer l'ensemble des points M tels que l'affixe de f (M) soit imaginaire pur.
c : Déterminer l'ensemble des points M tels que f (M) ait pour affixe un complexe de module 1.

Correction

Exercice 1 **retour à l'énoncé**
1: *a* : $z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1) = (z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i)$
***b*:** Les solutions de l'équation P(z) = 0, dans C, sont donc: 1 , – 1 , i et – i .

c: D'après la question précédente, l'équation $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$ peut s'écrire : $\frac{2z+1}{z-1} = 1$ ou $\frac{2z+1}{z-1} = -1$ ou $\frac{2z+1}{z-1} = i$ ou $\frac{2z+1}{z-1} = -i$.

Ce qui fournit les valeurs:

$$z = -2 \text{ ou } z = 0 \text{ ou } z = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i \text{ ou } z = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$$

2: *a*: Sans difficultés, on place les points!

***b*:** $|a+1| = |b+1| = |c+1| = |0+1| = 1$

Les quatre points O , A , B , C appartiennent au cercle de centre K (– 1 ; 0) et de rayon $r = 1$.

3: $\frac{a-c}{d-c} = \frac{-2+\frac{1}{5}-\frac{3i}{5}}{-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{3i}{5}} = \frac{2(9+i)}{3+6i} = 2\,\frac{3+i}{1+2i}$

$\frac{2(3+i)(1-2i)}{5} = 2(1-i) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$

On en déduit que le rapport $\frac{CA}{CD} = 2\sqrt{2}$

On peut aussi en déduire que l'angle ($\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CD}$) à une mesure de $-\frac{\pi}{4}$.

Comme de plus le triangle ACO est rectangle en C (car OA est un diamètre du cercle de centre K et de rayon 1), on peut dire que la droite (CD) est une bissectrice des droites (CO) et (CA).

Exercice 2 [retour à l'énoncé]

1: "2" est solution évidente, on factorise avec (z – 2), puis on obtient les deux autres solutions. Comme par miracle, on retrouve les trois nombres complexes de la question suivantes.

2: *a*: $z_A = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ et $z_C = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

***b*:** Sans problème.

***c*:** On remarque que :

$$|z_A - 2| = |z_B - 2| = |z_A - z_B| = 2\sqrt{3}.$$

Donc le triangle ABC est équilatéral.

3: *a*: f est simplement la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

***b*:** On remarque alors que F(A) = C et F(C) = B. Par une rotation, l'image d'une droite est une droite, donc, l'image de la droite (AC) est la droite (BC).

Exercice 3 [retour à l'énoncé]

On appelle S_1 le cercle de centre O et de rayon 1. Par définition , le point M est un point quelconque de S_1.

1: Le point P s'obtient, à partir du point M, par la translation de vecteur $\vec{u}$.

Le point Q s'obtient par la rotation de centre O et d'angle α car l'affixe de Q est $z^2 = z\,e^{i\alpha}$.

On obtient simplement Q à l'aide d'un compas en suivant les étapes suivantes:

- On place M sur le cercle S_1.
- On trace le cercle de centre M et de rayon AM.
- On obtient deux points d'intersection, en général, entre ce cercle et S_1. Le premier point est A. Le second point est le point Q.

Remarquez que, par construction, on ne peut avoir A = Q que si A = M ou A et M diamétralement opposés sur le cercle S_1.

2: On sait que par une translation T de vecteur $\vec{k}$, l'image d'un cercle de centre X et de rayon r est le cercle de centre T(X) et de rayon r.

Par la translation de vecteur $\vec{u}$, l'image de O est A. Donc l'image du cercle de centre O et de rayon $r = 1$ est le cercle de centre A et de rayon 1.

Comme M parcourt le cercle de centre O et de rayon, on en déduit que l'ensemble des points P est le cercle de centre A et de rayon 1.

3: Pour construire le point S, on suit les étapes suivantes:

- On place M sur le cercle S_1.
- On place le point Q obtenue par la rotation de centre O et d'angle α .(voir la construction précédente)
- On place le point K tel que OMKQ soit un parallélogramme.
- On applique à K la translation de vecteur $\vec{u}$.

Et là, on obtient S.

4: On remarque que le point M est sur la droite (OS). Pour le vérifier, il suffit de montrer que $\frac{1+z+z^2}{z}$ est réel.

Or, $\frac{1+z+z^2}{z} = \frac{1}{z} + 1 + z$, et comme $z = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$, l'inverse de z est son conjugué. D'où $\frac{1}{z} + z = 2\cos\alpha$

$\frac{1+z+z^2}{z} = 2\cos\alpha + 1$

Cette expression est bien réelle, les trois points O, S et M sont bien alignés.

Exercice 4 [retour à l'énoncé]

1: Cette équation est du second degré et a pour discriminant – 8.

Ses racines sont donc $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

2: *a*: Ces deux complexes ont pour module 2.

Comme $-\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{3\pi}{4}$, on peut alors écrire ces deux complexes sous leur forme trigonométrique:

$z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$

et $z_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} = 2(\cos\frac{-3\pi}{4} + i\sin\frac{-3\pi}{4})$

***b*:** Comme z_1 et z_2 ont même module 2, le rapport $\frac{z_1}{z_2}$ a pour module 1.

De plus, un argument de z_1 est $\frac{3\pi}{4}$ et un argument de z_2 est $\frac{-3\pi}{4}$, on peut dire qu'un argument de $\frac{z_1}{z_2}$ est : $\frac{3\pi}{4} - \frac{-3\pi}{4}$ soit $\frac{3\pi}{2}$

Ce qui montre que $\frac{z_1}{z_2} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$

donc $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 = -1$.

3: ***Rappel:***
Soit l'homothétie h de centre A d'affixe a et de rapport k . Pour tout point M du plan d'affixe z,
M' = h(M) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM'} = k\,\overrightarrow{AM}$
l'affixe de M' = h(M) est : $z' = a + k\,(z - a)$.

Soit la rotation ,de centre A, d'affixe a, d'angle α. Pour tout point M du plan d'affixe z, l'affixe de r(M) est :

$$z' = e^{i\alpha}(z - a) + a.$$

***a*:** L'affixe de M_3 est : $z_3 = -3\left[z_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] + \frac{\sqrt{2}}{2}$

ce qui donne : $z_3 = -3\left[\sqrt{2}\,(1 - i) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] + \frac{\sqrt{2}}{2}$

$z_3 = -\sqrt{2} + 3\,i\sqrt{2} = \sqrt{2}\,(-1 + 3\,i)$

***b*:** L'affixe de M_4 est $z_4 = e^{-i\frac{\pi}{2}}\,z_2 = -\,i\,z_2$ ce qui donne :

$$z_4 = -\,i\sqrt{2}\,(1 - i) = -\sqrt{2}\,(1 + i).$$

***c*:** figure sans difficultés.

***d*:** $\frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} = -\,i$.

donc arg $\frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} \equiv -\frac{\pi}{2}\ (2\,\pi)$

soit $(\overrightarrow{M_1M_4}, \overrightarrow{M_1M_3}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ (2\,\pi)$

Les droites (M_3M_1) et (M_1M_4) sont orthogonales.

***e*:** L'affixe de I est : $z_I = \frac{z_3 + z_4}{2}$.

L'affixe de M_5 est : $z_5 = 2\,z_I - z_1 = \sqrt{2}\,(-3 + i)$.

On constate alors que :
$|z_1 - z_3| = |z_3 - z_5| = |z_5 - z_4| = |z_4 - z_1|$
On a donc un quadrilatère dont les côtés ont même longueur donc qui est un losange.
De plus, d'après la question précédente, le triangle $M_3M_1M_4$ est rectangle en M_1. Le losange possède un angle droit, c'est donc un carré.

Exercice 5 [retour à l'énoncé]

1: L'équation (1) peut s'écrire : $z^2 - 2z + 2 = 0$.
Equation du second degré de discriminant – 4. Les solutions sont $(1 + i)$ et $(1 - i)$.
Le module des ces deux solutions est $\sqrt{2}$. La première a un argument égal à $\frac{\pi}{4}$, la seconde a un argument égal à $-\frac{\pi}{4}$.

2: L'équation (2) s'écrit: $z - 2 = i\,z - i$,
ou encore $z\,(1 - i) = 2 - i$
et finalement $z = \frac{2 - i}{1 - i} = \frac{(2 - i)(1 + i)}{2} = \frac{3}{2} + \frac{i}{2}$.

3: *a*: $\frac{z - 2}{z - 1}$ a pour argument l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}$ et pour module le rapport des longueurs MA et MB.

***b*:** La solution de l'équation (2) correspond au point M tel que l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}$ et tel que M soit équidistant des points A et B.

On le construit en plaçant les points A et B, puis en traçant le cercle de diamètre AB, puis la médiatrice de [AB]. On obtient deux points d'intersection entre ce cercle et cette droite. L'un correspond à l'équation (2), l'autre, à l'équation $\frac{z - 2}{z - 1} = -\,i$.

Remarquons que la médiatrice de [AB] est la droite d'équation $x = \frac{3}{2}$.

Cette petite remarque permet de finir l'exercice.

4: *a*: Toute solution de $\left(\frac{z - 2}{z - 1}\right)^n = i$ doit vérifier, en considérant les modules : $\left|\left(\frac{z - 2}{z - 1}\right)^n\right| = |-\,i| = 1$.

Comme $|z^n| = 1$ si et seulement si $|z| = 1$, on en déduit que toute solution de l'équation doit vérifier : $\left|\frac{z - 2}{z - 1}\right| = 1$.

Ceci signifie que le point M d'affixe z est équidistant des points A et B, donc que son abscisse est égale à $\frac{3}{2}$, donc que la partie réelle de z est bien $\frac{3}{2}$.

***b*:** D'après la question précédente, toute solution de cette équation doit avoir une partie réelle égale à $\frac{3}{2}$. Donc, les solutions sont de la forme : $z = \frac{3}{2} + i\,y$, où y est un réel.

L'équation s'écrit alors: $\left(\frac{-\frac{1}{2} + i\,y}{\frac{1}{2} + i\,y}\right)^2 = i$

Ce qui donne : $(-1 + 2\,i\,y)^2 = i\,(1 + 2\,i\,y)^2$
$1 - 4\,i\,y - 4\,y^2 = i(1 + 4\,i\,y - 4\,y^2)$
$1 - 4\,y^2 - 4\,i\,y = -4\,y + i\,(1 - 4\,y^2)$
D'où, en comparant les parties réelles et imaginaires:
$1 - 4y^2 = -4\,y$ soit $4\,y^2 - 4\,y - 1 = 0$
Les solutions de cette dernière équation sont:

$$y_1 = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \text{ et } y_2 = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}.$$

D'où, la forme algébrique des solutions de l'équation (3).

$$z = \frac{3}{2} + i\,\frac{1 + \sqrt{2}}{2} \text{ et } z = \frac{3}{2} + i\,\frac{1 - \sqrt{2}}{2}$$

Exercice 6 [retour à l'énoncé]

Rappel:
On sait que, si A a pour affixe a, et si r est la rotation de centre A et d'angle α, alors , M étant d'affixe z et M' d'affixe z', on a:

r(M) = M' si et seulement si $z' = a + e^{i\alpha}(z - a)$.

1: *a*: r(B) = C, donc : $c = b\,e^{i\frac{\pi}{12}}$, d'où, comme $b = e^{i\frac{\pi}{12}}$,
$c = e^{i\frac{\pi}{12}} \times e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Comme on sait que $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et que $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, on en déduit la forme algébrique de c : $c = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}$

***b*:** I est le milieu de [AC], donc, comme 1 est l'affixe de A et c est l'affixe de C, on a:

$$z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} + i\,\frac{1}{4}$$

2: *a*: $b = e^{i\frac{\pi}{12}} \times a$ donc r(A) = B.
On sait que r(B) = C.
Donc l'image par r du segment [AB] est le segment [BC]. Comme une rotation est une isométrie du plan (conservation des distances), on en déduit que AB = BC.
De plus, O étant le centre de la rotation, on a: OA = OB =OC.
Donc, la droite (OB) est la médiatrice du segment [AC].(ensemble des points équidistants à A et C)
De plus, on a AI = CI, car I est le milieu de [AC]. Donc I est sur la médiatrice de [AC].
D'où, (OI) = (OB).
***b*:** La forme trigonométrique de z_I est :
$z_I = |z_I|.(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$ où $|z_I| = \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$.
***c*:** Une équation de la droite (OI) est :
$x = (\sqrt{3} + 2)\,y$ ou encore $y = (2 - \sqrt{3})\,x$
Comme B est sur la droite (OI), ses coordonnées vérifient l'équation précédente. De plus, comme OB = 1, et que $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$ sont positifs, on peut dire que les coordonnées de B sont les solutions du système suivants :
$x = (\sqrt{3} + 2)\,y$
$x^2 + y^2 = 1$
$x > 0$
$y > 0$
Ceci conduit à : $y^2(8 + 4\sqrt{3}) = 1$ et donc à :

$$y = \frac{1}{\sqrt{4(2+\sqrt{3})}} = \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

et donc :

$$x = (\sqrt{3} + 2)\,y = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

D'où les valeurs exactes :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Exercice 9 [retour à l'énoncé]
1: On remarque que , d'après les propriétés de base sur les Nombres Complexes, que :
AB = $|b - a|$, BC = $|c - b|$ et AC = $|c - a|$
Comme $a = 3 + i$ et $b = 7 - i$, on a : $b - a = 4 - 2i$ d'où
$|b - a| = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$
De même
$|b - a| = 10$ et $|c - a| = 4\sqrt{5}$
On voit alors que BC ^{2} = AB ^{2} + AC ^{2}. Le triangle ABC est donc rectangle en A.
2: ABC étant rectangle en A, le milieu de [BC] est le centre du cercle circonscrit à ABC.
Le milieu E de [BC] a pour affixe $e = (b + c)/2 = 3 - 4\,i$.
Un simple calcul montre que le rayon de ce cercle est R = 5.
DE = $|e - d|$ = 5 donc D appartient au cercle de centre E de rayon 5.
3: Résultat :
$a' = 3 - i$; $b' = \frac{7}{5} + i\frac{1}{5}$
$c' = -\frac{1}{5} + i\frac{7}{5}$ $d' = 1 + i\frac{1}{2}$

On calcule alors:

$$\frac{c'-a'}{b'-a'} = \frac{-\frac{16}{5} + i\frac{12}{5}}{-\frac{8}{5} + i\frac{6}{5}} = 2$$

On en déduit qu'un argument de ce nombre complexe est 0 (modulo 2 π)
or $\arg\frac{c'-a'}{b'-a'} \equiv (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'B'})$ donc $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'B'}) \equiv 0\ (2\pi)$
Les points A' , B' et C' sont donc alignés

Exercice 10 (indications) [retour à l'énoncé]
Pour des raisons de commodités, on identifie M et son affixe z.
Ainsi, on notera indifféremment T(z) ou T(M) l'image de M par T.
1 : De la définition même de T, on voit que la seule valeur pour laquelle z' n'est pas défini est $z = -i$
2 : Sans difficultés :
3 : On remarque que T se décompose en trois transformations simples :
$f : z \to (z + i)$, $g : z \to -2\,i\,z$, $h : z \to 1/z$ et $t : z \to z + 1$.
On a : T = $t \circ h \circ g \circ f$.
4 : Le seul point d'ayant pas d'antécédent est le seul point M' d'affixe z' n'admettant aucune solution à l'équation : T(M) = M'.
On voit alors que c'est le point d'affixe 1.
5 : L'axe des ordonnées est l'ensemble des points M d'affixe z telle que z soit imaginaire pur : $z = i\,y$, avec y réel. On a donc :
$T(z) = \frac{i\,y - i}{i\,y + i}$ ce qui donne : $T(z) = \frac{y-1}{y+1}$
Pour tout $y \neq 1$, T(z) ∈ IR et T(z) ≠ 1
On voit alors que lorsque M parcourt l'axe de ordonnées (sauf le point d'affixe i), T(M) parcourt la droite des abscisses (sauf le point d'affixe 1).
L'axe des abscisses est l'ensemble des points M d'affixe z telle que z soit réel $z = x$, avec x réel. On a donc :

$$T(z) = \frac{x-i}{x+i} = \frac{x^2 - 1 + 2\,i\,x}{x^2 + 1}.$$

On cherche donc les complexes $Z = X + i\,Y$, (X et Y réels) tels qu'il existe x réel tel que : $\frac{x-i}{x+i} = Z = X + i\,Y$

$$\frac{x-i}{x+i} = Z \Leftrightarrow x - i = Z\,(x + i) \Leftrightarrow x = -i\,\frac{Z+1}{Z-1}$$

$$\Leftrightarrow x = -i\,\frac{[(X+1)+i\,Y][(X-1)-i\,Y]}{[(X-1)+i\,Y][(X-1)-i\,Y]}$$

$$\Leftrightarrow x = -i\,\frac{(X+1)(X-1)+Y^2-2\,i\,Y}{(X-1)^2+Y^2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2\,Y}{(X-1)^2+Y^2} - i\,\frac{X^2-1+Y^2}{(X-1)^2+Y^2}$$

$$x \in \mathbb{R},\ \frac{x-i}{x+i} = X + i\,Y \Leftrightarrow \frac{X^2-1+Y^2}{(X-1)^2+Y^2} = 0$$

$X^2 + Y^2 = 1$
T(M) décrit le cercle de centre O et de rayon R = 1
6 : a : C_1 est l'ensemble des points M(x ; y) tels que :
$(x - 1)^2 + y^2 = 1$, ou encore : $x^2 + y^2 = 2\,x$.
Or, $z' = \frac{1}{z} = \frac{x - i\,y}{x^2 + y^2} = \frac{x - i\,y}{2\,x}$,

donc : $z' = \frac{1}{2} - i\frac{y}{2x}$

On en déduit que l'image de C_1 par T_1 est la droite d'équation "$x = 0{,}5$"

Attention, T_1 n'est pas définie en O.

b : On cherche l'ensemble des $Z = X + iY$ de la forme :

$Z = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+i(x+1)}$, on encore $x + i(x + 1) = \frac{1}{X+iY}$

soit $x = \frac{X}{X^2+Y^2}$ et $x + 1 = \frac{-Y}{X^2+Y^2}$

Ceci donne alors :

$\frac{X}{X^2+Y^2} + 1 = \frac{-Y}{X^2+Y^2}$

ou encore : $X^2 + Y^2 + X + Y = 0$, Soit :

$\left(X+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

On obtient alors le cercle de centre B(– 0,5 ; – 0,5) et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$ excepté le point O!

c : L'application T_2 n'est rien d'autre que la composée de l'homothétie de centre O et de rapport – 2 , et de la rotation de centre O et de mesure $\frac{\pi}{2}$.

L'homothétie transforme le cercle C_2 en le cercle C'_2 de centre $h(O_2) = O'_2$ de coordonnées (– 1 ; 1) et de rayon $R' = |-2|R = \sqrt{2}$.

La rotation transforme le cercle C'_2 de centre O'_2 et de rayon $\sqrt{2}$ en le cercle de centre $r(O'_2) = E$ et de même rayon.

L'image de C_2 par T_2 est donc le cercle de centre E(1 ; – 1) et de rayon $\sqrt{2}$.

d : Même principe. L'image de D_2 est la droite D' d'équation "$y = 1$"

7 : Pour obtenir l'image de C par T, on applique d'abord :

i : la translation de vecteur v, qui correspond à l'application f : Or, $f(C) = C_1$.

ii : Puis l'application T_1 . Or $T_1(C_1)$ est la droite D_2 : "$x = 0{,}5$ "

iii : Puis l'application T_2. Or $T_2(D_2)$ est la droite D d'équation "$y = 1$"

iv : Puis l'application $t(z) = z + 1$, Or, (c'est la translation de vecteur u), on a $t(D) = D$.

Donc, l'image de C par T est la droite D' d'équation "$y = 1$"

8 : Pour l'image de D ($y = x$) par T s'obtient de la même façon :

i : On applique f : Or $f(D)$ = droite D_1 d'équation "$y = x + 1$"

ii : Puis on applique T_1. Or $T_1(D_1) = C_2$

iii : Puis applique T_2 :

Or $T(C_2)$ = cercle de C' centre E(1 ; – 1) et de rayon $\sqrt{2}$

iv : Puis on applique $t(z)=z+1$. Or, $t(C')$ = cercle C'' de centre F(0 ; 1) et de rayon $\sqrt{2}$.

Donc, l'image de D par T est le cercle C''. (centre F(0 ; 1) et rayon = $\sqrt{2}$).

9 : *a* : $T(z) = z'$ est défini si et seulement si : $1 - i + e^{i\theta} \neq -i$, ou encore : $e^{i\theta} \neq -1$.

Comme θ est dans $[0 ; 2\pi[$, ceci conduit à $\theta \neq \pi$

b : $|z - (1 - i)| = |1 - i + e^{i\theta} - 1 + i| = |e^{i\theta}| = 1$.

On en déduit que M décrit le cercle de centre U(1 ; – 1) et de rayon 1.

c : C'est la même question que la question 7.

Exercice 11 ASIE Juin 2001 **retour à l'énoncé**

Un simple calcul montre que l'affixe de f(C) est :

$c' = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$

Le module est alors : $|c'| = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

On a alors $c' = |c'|\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

donc un argument de c' est : Arg $c' = \frac{5\pi}{4}$

on a alors $c' = \frac{3}{2}\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

Forme trigonométrique de c'

Il suffit de résoudre l'équation $f(z) = \frac{1}{2}$.

On obtient alors $d = -1 + 2i$.

$p = |z + 1|$ et $p' = |z' + i|$.

a) Si z est différent de – 1, alors :

$p \times p' = |z + 1| \times |z' + i|$.

or $z' + i = \frac{-iz-2}{z+1} + i = \frac{-2+i}{z+1}$

donc $|z' + i| = \left|\frac{-2+i}{z+1}\right| = \frac{\sqrt{5}}{|z+1|}$

donc $p \times p' = \sqrt{5}$

b) M appartient au cercle de centre A et de rayon 2 si et seulement si AM = 2.

en passant par les affixes des points, $AM = 2 \Leftrightarrow |z + 1| = 2$.

D'après la question précédente, en prenant $p = 2$, on a alors :

$|z + 1| \times |z + i| = 2p'$ d'où : $p' = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

La distance CM' est donc $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

M' appartient donc au cercle (C') de centre C et de rayon

a) L'argument de μ est l'angle ($\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}$).

Cela correspondant à l'angle en M du triangle AMB.

b) C'est un simple calcul sans difficulté en remarquant que $i^2 = -1$.

c) Comme $z' = -i\mu$, on peut dire que l'on obtient le point d'affixe z' à partir du point d'affixe μ par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Dire que z' est un réel revient à dire que μ est un imaginaire pur.

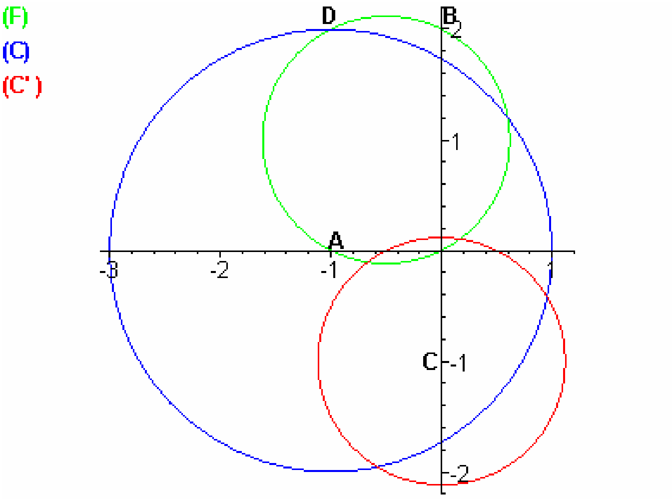
Donc qu'un argument de μ soit $-\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2}$.

Donc, d'après le résultat de la question 4 : *a*) , que le triangle (AMB) soit rectangle en M.

Donc, que le point M appartient au cercle de diamètre [AB] moins le point A .

L'ensemble (*F*) est donc le cercle de diamètre [AB] auquel on retire le point A.

d) Comme $f(d) = \frac{1}{2}$ et que $|a - d| = 2$ (simple vérification!) on peut dire que D appartient bien à (***F***) et à (C).



Exercice 12 retour à l'énoncé

1. *a* : On remarque que $j^3 = 1$ et que $1 - j^3 = (1 + j + j^2)(1 - j)$

Comme j est distinct de 1, on a bien $1 + j + j^2 = 0$

b : Le triangle MNP est équilatéral direct si et seulement si l'image de P par la rotation r de centre N et d'angle $\frac{\pi}{3}$ est M.

La forme complexe de cette rotation est : $z' = e^{\frac{i\pi}{3}}(z - n) + n$

En particulier, MNP est équilatéral direct si et seulement si :

$m - n = e^{\frac{i\pi}{3}}(p - n)$

ce qui donne :

$$\frac{n-p}{m-n} = -e^{-\frac{i\pi}{3}} = j$$

De plus, dire que $m + j\,n + j^2\,p = 0$ revient à dire que $m - (1+j^2)\,n + j^2 p = 0$ car $1 + j + j^2 = 0$.

On obtient alors : $(m - n) = -j^2(p - n)$ ou encore :

$$\frac{n-p}{m-n} = \frac{1}{j^2} = j \text{ car } j^3 = 1$$

On a donc bien équivalence entre les 3 propositions.

2. Appelons a, b, c les affixes respectives des points A, B, C.

Le centre de gravité du triangle ABC est le point G d'affixe g vérifiant : $3\,g = a + b + c$.

Les triangles ABC et DEF ont même centre de gravité si et seulement si on a : $a + b + c = d + e + f$.

On sait que les triangles BDC , CEA et AFB sont équilatéraux directs.

D'après la question précédente, on a donc les relations :

$b + j\,d + j^2 c = 0$

$c + j\,e + j^2 a = 0$

$a + j\,f + j^2 b = 0$

Si on effectue la somme des trois lignes, on a alors :

$(a + b + c) + j\,(d + e + f) + j^2(a + b + c) = 0$

$(a + b + c)\,(1 + j^2) + j\,(d + e + f) = 0$

Or, $1 + j + j^2 = 0$ ou encore , $1 + j^2 = -j$, on peut alors écrire que :

$j\,(a + b + c) + j\,(d + e + f) = 0$. Comme j est non nul , cela conduit à : $(a + b + c) = (d + e + f)$. D'où la conclusion!

3. *a* : On sait que GHK est équilatéral direct si et seulement si : $\frac{h-k}{g-h} = j$

De plus, comme G , H et K sont les centres de gravité des triangles BDC , CEA et AFB , on a les relations :

$3\,g = b + d + a$: $3\,h = c + e + a$: $3\,k = a + f + b$.

Pour simplifier, posons $u = e^{-\frac{i\pi}{3}}$.

Les triangles BDC , CEA et AFB sont équilatéraux directs, on a donc les relations :

$(c - b) = u\,(c - d)$: $(e - a) = u\,(c - a)$: $(a - f) = u\,(a - b)$

Or, $3\,h - 3\,k = (e - a) + (c - b) + (a - f)$

$3\,h - 3\,k = u\,[(c - a) + (c - d) + (a - b)]$

D'où $3\,h - 3\,k = -u\,[(b + d + a) - (c + e + a)]$

$3\,h - 3\,k = -u\,[3\,g - 3\,k]$

Comme $-u = j$, on a bien $\frac{h-k}{g-h} = j$

GHK est bien équilatéral direct.

b : On sait que $(a + b + c) = (d + e + f)$.

De plus :

$3\,g + 3\,h + 3\,k = 2(a + b + c) + (d + e + f)$ d'où

$3\,g + 3\,h + 3\,k = 3\,(a + b + c)$.

soit $g + h + k = (a + b + c)$.

ABC et GHK ont même centre de gravité.