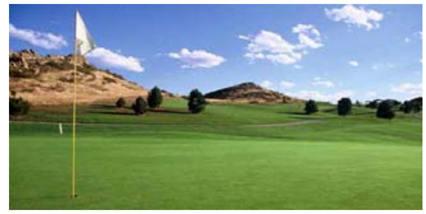
Probabilités conditionnelles

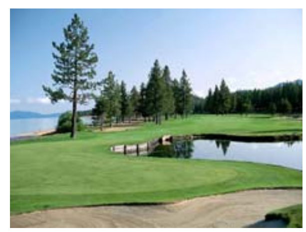


Sur un parcours de golf , Tiger Wood va jouer le trou n° 7 , un par 3 de 165 m .

On suppose que Tiger Wood sera sur le green avec un maximum de deux coups, on négligera ici les "trous en un", relativement exceptionnels, même pour lui.

S'il atteint le green du premier coup , on dit qu'il est en **régulation**.
Sinon il devra jouer un second coup, c'est-à-dire une **approche**.
Ensuite, il puttera pour terminer le trou (un putt ou plus si nécessaire) .
Si, au total, il rentre sa balle dans le trou en deux coups seulement, on dit qu'il réalise un **birdie** (un coup sous le par qui est de 3 ici).

La probabilité qu'il soit en régulation est de 0,8 .
La probabilité qu'il fasse birdie sachant qu'il est en régulation est de 0,4 .
La probabilité qu'il rentre directement dans le trou son approche de l'extérieur du green est égal à 0,1 .



Soit les événements :

R : " Tiger Wood est en régulation "
B : " Tiger Wood réalise le birdie "

1) a/ faire un arbre que l'on complètera
   b/ calculer la probabilité qu'il soit en régulation et qu'il fasse birdie
   c/ calculer la probabilité qu'il fasse birdie
   d/ calculer la probabilité qu'il soit en régulation sachant qu'il a fait un birdie

2) Tiger Wood partage sa partie avec Greg Norman .
   La probabilité que ce dernier fasse birdie sur un par 3 est de 0,25 .
   Quelle est la probabilité que les deux joueurs fassent birdie sur ce trou ?

3) Ayant perdu contre Greg Norman sur ce trou , Tiger Wood décide le lendemain de s'entraîner sur ce même trou . Il joue alors cinq fois de suite le trou n° 7 , et ce dans des conditions similaires et indépendantes .
   Quelle est la probabilité qu'il fasse au moins une fois birdie ?

1) a/

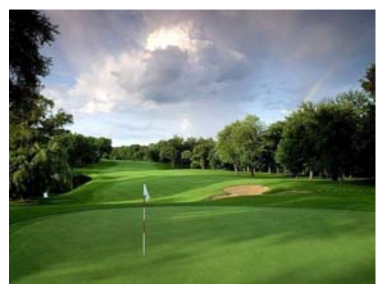
1^{ier} coup		$2^{ème}$ coup	Issue d'un chemin
$p(R) = 0{,}8$	R — $p(B/R) = 0{,}4$	B	$R \cap B$
	R — $p(\overline{B}/R)$	$\overline{B}$	$R \cap \overline{B}$
$p(\overline{R})$	$\overline{R}$ — $p(B/\overline{R}) = 0{,}1$	B	$\overline{R} \cap B$
	$\overline{R}$ — $p(\overline{B}/\overline{R})$	$\overline{B}$	$\overline{R} \cap \overline{B}$

R et $\overline{R}$ étant contraires $\Rightarrow$ $p(R) + p(\overline{R}) = 1 \quad \Rightarrow \quad p(\overline{R}) = 0{,}2$

$$p(B/R) + p(\overline{B}/R) = 1 \quad \Rightarrow \quad p(\overline{B}/R) = 0{,}6$$

La somme des probabilités qui pondèrent les branches issues d'un même nœud est égale à 1

$$p(B/\overline{R}) + p(\overline{B}/\overline{R}) = 1 \quad \Rightarrow \quad p(\overline{B}/\overline{R}) = 0{,}9$$



b/ il faut calculer $p(R \cap B)$:

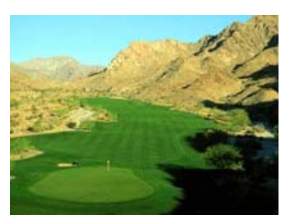
$$p(R \cap B) = p(R) \times p(B/R)$$
$$= 0{,}8 \times 0{,}4$$
$$= 0{,}32$$

Dans un arbre pondéré , la probabilité d'un événement représenté par un chemin est égale au produit des probabilités qui pondèrent chaque branche du chemin

c/ il y a deux situations pour lesquelles Tiger Wood réaliserait un birdie :

$\rightarrow$ soit il est en régulation et il rentre son premier putt : $R \cap B$

$\rightarrow$ soit il n'est pas en régulation et il rentre son approche directement dans le trou : $\overline{R} \cap B$



B et $\overline{B}$ réalisent une partition de Ω

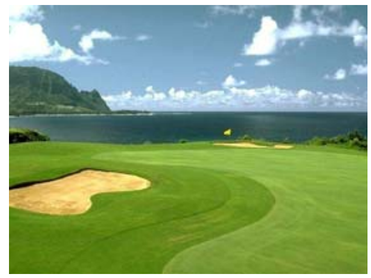
Par conséquent : $B = (R \cap B) \cup (\overline{R} \cap B)$

D'où, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(B) &= p(R \cap B) + p(\overline{R} \cap B) \\ &= 0,32 + p(\overline{R}) \times p(B / \overline{R}) \\ &= 0,32 + 0,2 \times 0,1 \\ &= 0,34 \end{aligned}$$

les événements $R \cap B$ et $\overline{R} \cap B$ étant incompatibles

d/ on doit calculer $p(R/B)$



$R \cap B = B \cap R$ $\quad$ $p(R \cap B) = p(B) \times p(R/B)$

D'où : $p(R/B) = \dfrac{p(R \cap B)}{p(B)}$

$$= \frac{0,32}{0,34} = \frac{16}{17}$$

2) Soit B' l'événement : " Greg Norman réalise le birdie "

On doit calculer $p(B \cap B')$

On a : $p(B \cap B') = p(B) \times p(B')$

B et B' étant indépendants

D'où : $p(B \cap B') = 0,34 \times 0,25$

$$= 0,085$$

3) Tiger Wood répète cinq fois de suite la même expérience et ce dans des conditions similaires et indépendantes .

Soit C l'événement : " Tiger Wood réalise au moins une fois le birdie "

L'événement contraire est donc $\overline{C}$: " il ne réalise aucun birdie "

$p(\overline{C}) = (1 - 0,34)^5 = 0,66^5$

On peut justifier le produit avec un arbre

Par conséquent : $p(C) = 1 - p(\overline{C})$

$$\begin{aligned} &= 1 - 0,66^5 \\ &\simeq 0,87 \end{aligned}$$