Produit scalaire et lieux géométriques

Soient A et B deux points distincts du plan.
Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que:
$\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=\overrightarrow{0}$

a. en développant le produit scalaire
b. en introduisant le milieu I du segment [AB]

Correction :

Remarque : Les groupements de lettres apparaissant en gras sont des vecteurs.

a.] $(\boldsymbol{MA}+\boldsymbol{MB}).(\boldsymbol{MA}-\boldsymbol{MB})=\boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{MA}.\boldsymbol{MA}-\boldsymbol{MA}.\boldsymbol{MB}+\boldsymbol{MB}.\boldsymbol{MA}-\boldsymbol{MB}.\boldsymbol{MB}=\boldsymbol{0}$

$\iff \boldsymbol{MA}^2-\boldsymbol{MB}^2=\boldsymbol{0}$

$\iff \boldsymbol{MA}^2=\boldsymbol{MB}^2$

$\iff \|\boldsymbol{MA}\|^2=\|\boldsymbol{MB}\|^2$

$\iff \|\boldsymbol{MA}\|=\|\boldsymbol{MB}\|$

$\iff$ M $\in$ à la médiatrice du segment [AB]

b.] I milieu du segment [AB] $\iff$ I barycentre de {(A, 1) ; (B, 1)}

$\iff \boldsymbol{IA}+\boldsymbol{IB}=\boldsymbol{0}$

$(\boldsymbol{MA}+\boldsymbol{MB}).(\boldsymbol{MA}-\boldsymbol{MB})=\boldsymbol{0} \iff (\boldsymbol{MI}+\boldsymbol{IA}+\boldsymbol{MI}+\boldsymbol{IB}).(\boldsymbol{MI}+\boldsymbol{IA}-\boldsymbol{MI}-\boldsymbol{IB})=\boldsymbol{0}$

$\iff (\boldsymbol{2MI}+\boldsymbol{IA}+\boldsymbol{IB}).(\boldsymbol{IA}-\boldsymbol{IB})=\boldsymbol{0}$

Or I est le barycentre de {(A, 1) ; (B, 1)}, d'où :

$\iff \boldsymbol{2MI}.(\boldsymbol{IA}-\boldsymbol{IB})=\boldsymbol{0}$

$\iff \boldsymbol{IA}=\boldsymbol{IB}$

$\iff$ M $\in$ à la médiatrice du segment [AB]