مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية و مبادئ في الحسابيات

القدرات المنتظرة

***- توظيف الزوجية وتفكيك عدد إلى جداء عوامل أولية في حل بعض المسائل البسيطة حول الأعداد الصحيحة الطبيعية.**

I) مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية

1- مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية

نشاط

من بين الأعداد التالية حدد تلك التي تمثل أعداد صحيحة طبيعية

5 ، $\sqrt{3}$ ، $4+16$ ، $\frac{5}{2}$ ، $12-23$ ، $\frac{15}{3}$ ، $\sqrt{25}$ ، $2{,}15$

تعريف

الأعداد 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ....تسمى أعدادا صحيحة طبيعية و تكون مجموعة تسمى مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية نرمز لها بـ $\mathbb{N}$

نكتب $\mathbb{N}=\{0;1;2;3;4;5........... \rightarrow\}$

مصطلحات و ترميز

*- العدد 0 يسمى العدد الصحيح الطبيعي الغير المنعدم

*- مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية الغير المنعدمة نرمز لها بالرمز $\mathbb{N}^*$

$$\mathbb{N}^*=\{1;2;3;4;5........... \rightarrow\}$$

تمرين

أتمم بأحد الرمزين $\in$ أو $\notin$

$\frac{24}{2}.....\mathbb{N}$; $3.....\mathbb{N}^*$; $-5....\mathbb{N}$; $0....\mathbb{N}^*$; $\sqrt{2}.....\mathbb{N}^*$; $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}.....\mathbb{N}$

2- الأعداد الزوجية – الأعداد الفردية

أنشطة

1- أعط كل الأعداد الزوجية المحصورة بين41 و 65

2- لنرمز لمجموعة الأعداد الزوجية بـ P و مجموعة الأعداد الفردية بـ I ،
أتمم بأحد الرمزين $\in$ أو $\notin$

$5\times 13...I$; $0...P$; $0....I$; $4\times 17....I$; $4\times 17....P$; $2\sqrt{3}....P$

3- ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين زوجيين و c و d عددين صحيحين طبيعيين فرديين
حدد زوجية الأعداد التالية(هل الأعداد زوجية أم فردية) مع تعليل الجواب

$a+b$; $c+d$; $a+c$

تعريف

نقول إن العدد الصحيح الطبيعي a عدد زوجي إذا وفقط كان يوجد عدد صحيح طبيعي k حيث $a=2k$

نقول إن العدد الصحيح الطبيعي a عدد فردي إذا وفقط كان يوجد عدد صحيح طبيعي k حيث $a=2k+1$

أمثلة

الأعداد 0 ، 2 ، 4 ، 6 ، 8 .... أعداد زوجية

الأعداد 1 ، 3 ، 5 ، 7 ، 9 .... أعداد فردية

ملاحظات

*- كل عدد صحيح طبيعي هو إما عدد زوجي أو عدد فردي

*- مجموع عددين زوجيين هو عدد زوجي
مجموع عددين فرديين هو عدد زوجي
مجموع عدد زوجي و عدد فردي هو عدد فردي

تمرين

1- ليكن n عددا صحيحا طبيعيا
أدرس زوجية كل من $n(n+1)$ و $n+(n+1)+(n+2)$ و $4n^2+4n+1$

2- ليكن n و m عددين صحيحين طبيعيين حيث $m \succ n$

بين أن $m+n$ و $m-n$ لهما نفس الزوجية

الحل

-1 * n و $n+1$ عددان صحيحان طبيعيان متتاليان ومنه أحدهما زوجي و الآخر فردي
و التالي جداؤهما زوجي إذن $n(n+1)$ زوجي

* لدينا $n+(n+1)+(n+2)=3(n+1)$ و التالي زوجية $n+(n+1)+(n+2)$ هي زوجية $n+1$
إذا كان n زوجيا فان $n+(n+1)+(n+2)$ فرديا
إذا كان n فرديا فان $n+(n+1)+(n+2)$ زوجي

* لدينا $4n^2+4n+1=2(2n^2+2n)+1$ و حيث أن $(2n^2+2n)\in\mathbb{N}$ فان $4n^2+4n+1$ زوجي

-2 n و m عددان صحيحان طبيعيان حيث $m\succ n$
نبين أن $m+n$ و $m-n$ لهما نفس الزوجية
العدد $(m-n)$ يمكن أن يكون زوجيا أو فرديا

* إذا كان $(m-n)$ زوجيا فانه يوجد k من $\mathbb{N}$ حيث $m-n=2k$ بإضافة $2n$ لطرفي المتفاوتة
نحصل على $m+n=2k+2n=2(k+n)$ وحيث أن $k+n\in\mathbb{N}$ فان $m+n$ زوجي

* إذا كان $(m-n)$ فرديا فانه يوجد k من $\mathbb{N}$ حيث $m-n=2k+1$ بإضافة $2n$ لطرفي المتفاوتة
نحصل على $m+n=2k+2n+1=2(k+n)+1$ وحيث أن $k+n\in\mathbb{N}$ فان $m+n$ فرديا

إذن $m+n$ و $m-n$ لهما نفس الزوجية

II) – مضاعفات عدد – قواسم عدد

A) مضاعفات عدد

1- أنشطة

نشاط1

-1 ضع الرمز $\times$ في المكان المناسب

	24	50	75	33	121	999	211	2210
مضاعف2								
مضاعف3								
مضاعف5								
مضاعف11								

-2 استخرج من بين أعداد السطر الأول المضاعفات المشترك للعددين 2 و3 ثم 3 و11

نشاط2

حدد المضاعفات العشرة الأولى للعدد6 ثم للعدد9
استنتج المضاعفات المشتركة من بين هذه المضاعفات
ماذا تلاحظ
(اصغر مضاعف مشترك غير منعدم للعددين 6 و9 هو 18 . المضاعفات المشتركة للعددين 6 و 9 هي مضاعفات العدد 18)

نشاط2

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا فرديا
أ- تأكد n^2-1 مضاعف للعدد 8 في الحالات التالية $n=1$; $n=3$; $n=5$; $n=7$
ب- بين أن n^2-1 مضاعف للعدد 8 كيفما كان العدد الصحيح الطبيعي الفردي n

الحل

ب- ليكن n عدد صحيح طبيعي فردي أي يوجد k من $\mathbb{N}$ حيث $n=2k+1$
لدينا $n^2-1=(n-1)(n+1)$ ومنه $n^2-1=4k(k+1)$
وحيث أن $k(k+1)$ عدد زوجي (لأنه جداء عددين متتاليين)
فانه يوجد k' من $\mathbb{N}$ حيث $k(k+1)=2k'$ و بالتالي $n^2-1=8k'$
إذن n^2-1 مضاعف للعدد8

2- تعريف

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين حيث b غير منعدم نقول إن العدد a مضاعف للعدد b إذا وفقط إذا وجد عدد صحيح طبيعي k حيث $a=bk$

أمثلة

الأعداد 0 ، 5 ، 10 ، 15 ،20 ، 25 ، 1775 مضاعفات للعدد 5

22 ليس مضاعف للعدد4

-3 * ليكن $b\in\mathbb{N}^*$

مضاعفات b هي الأعداد kb حيث $k\in\mathbb{N}$

* $0\times k=0$

خاصية

* لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم ما لنهاية من المضاعفات * للعدد 0 مضاعف وحيد هو0

4- المضاعف المشترك الأصغر

تعريف

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو أصغر مضاعف مشترك غير منعدم للعددين a و b نرمز له بالرمز $PPCM(a;b)$

أمثلة $PPCM(4;9)=36$ ، $PPCM(6;10)=30$

B) قواسم عدد

1- نشاط

حدد قواسم 90 ثم قواسم 126 ثم استنتج أكبر قاسم مشترك للعددين 90 و 126

2- تعريف

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين حيث b غير منعدم نقول إن العدد b قاسم للعدد a إذا وفقط إذا وجد عدد صحيح طبيعي k حيث $a=bk$

ملاحظة : العدد b قاسم للعدد a إذا وفقط إذا العدد a مضاعف للعدد b

نقول أيضا العدد a قابل للقسمة على b

- كل عدد صحيح طبيعي غير منعدم مخالفا لـ 1 له على الاقل قاسمان 1 و نفسه
- للعدد 1 قاسم وحيد هو نفسه
- جميع الأعداد الصحيحة الطبيعية الغير المنعدمة تقسم 0

3- القاسم المشترك الأكبر لعددين

تعريف

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو اكبر قاسم مشترك لهما نرمز له بالرمز $PGCD(a;b)$

مثال $PGCD(126;90)=18$ ، $PGCD(4;9)=1$

III) الأعداد الأولية

1- تعريف

نسمي عددا أوليا كل عدد صحيح طبيعي له قاسمان بالضبط

أمثلة (حدد الأعداد الأولية الأصغر من40)

الأعداد الأولية الأصغر من 40 هي 2 ، 3 ، 7 ، 11 ، 13 ، 17 ، 19 ، 13 ، 29 ، 31 ، 37

2- التفكيك إلى جداء عوامل أولية لعدد غير أولي

مبرهنة (مقبولة)

كل عدد صحيح طبيعي n $(n\geq 2)$ هو عدد أولي أو جداء عوامل أولية

أمثلة

41 عدد أولي

72 عدد غير أولي و $72=8\times 9=2^3\times 3^2$

تعريف

ليكن a عددا صحيحا طبيعيا غير أولي
كتابة a على شكل جداء عوامله أولية تسمى " التفكيك إلى جداء عوامل أولية" للعدد a

أمثلة

فكك الأعداد 24 ، 319 ، 1344 إلى جداء عوامل أولية

$24 = 8\times 3 = 2^3\times 3$ و $319 = 11\times 29$ $\quad$ $1344 = 4\times 4\times 4\times 21 = 2^6\times 3\times 7$

تقنية للتفكيك (نقبلها)

لتفكيك عدد صحيح طبيعي غير منعدم a نأخذ اصغر عدد أولي يقسم a و ننجز القسمة فنحصل على عدد b خارج القسمة فنأخذ اصغر عدد أولي يقسم b فنحصل على خارج القسمة .... و نتابع على هذا المنوال حتى نحصل على خارج يساوي 1. العدد a سيكون هو جداء جميع الأعداد الأولية التي قسمنا بها	**مثال:** $$\begin{array}{r\|l} 1344 & 2 \\ 672 & 2 \\ 336 & 2 \\ 168 & 2 \\ 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$ إذن $1344 = 2^6\times 3\times 7$

3- خاصيات (نقبلها)

خاصية1

المضاعف المشترك الأصغر لعددين هو جداء العوامل الأولية المشتركة و الغير المشتركة بين تفكيكي هذين العددين إلى جداء عوامل أولية. المرفوعة إلى أكبر أس.

خاصية1

القاسم المشترك الأكبر لعددين هو جداء العوامل الأولية المشتركة بين تفكيكي هذين العددين إلى جداء عوامل أولية. المرفوعة إلى أصغر أس.

ملاحظات $PGCD(a;1)=1$ ، $PGCD(a;a)=a$ ، $PPCM(a;1)=a$ $\quad$ $PPCM(a;a)=a$

تمرين:

حدد $PGCD(84;216)$ ، $PPCM(84;216)$ ، $PGCD(35;121)$ ، $PPCM(35;121)$

إضافات

* طريقة لتحديد المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b حيث $a\geq b$
أحدد مضاعفات a ثم أتأكد بالتتابع ابتداء من أصغر مضاعف غير منعدم للعدد a هل هو مضاعف للعدد b فإذا كان الجواب لا ، أتابع البحث إن كان نعم ، أتوقف و العدد الذي حصلت فيه على هذا الجواب هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b.

* طريقة لتحديد القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b حيث $a\geq b$
أحدد قواسم العدد b ثم أتأكد بالتتابع تناقصيا ابتداء من أكبر قاسم للعدد b هل هو قاسم للعدد a فإذا كان الجواب لا ، أتابع البحث ان كان نعم ، أتوقف و العدد الذي حصلت فيه على هذا الجواب هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b.

* طريقة لتحديد ما إذا كان العدد a أوليا أم لا
نحدد أولا جميع الأعداد الأولية p حيث $p^2\leq a$.
إذا كان a يقبل القسمة على أحد هذه الأعداد فان a غير أولي
إذا كان a لا يقبل القسمة على أي عدد من هذه الأعداد فان a أولي