

Correction succincte du contrôle n° 2 Sujet 1 et Sujet 2

Sujet 1

Exercice 1

Population étudiée : habitants de métropole.

Variable étudiée X : nombre de kilomètres effectués par jour en voiture. par des habitants de métropole.

1. Pour construire un intervalle de confiance, on se base sur un échantillon de taille $n = 15 < 30$, donc il faut supposer que X suit une loi normale. On note μ la moyenne de X et σ l'écart-type de X , inconnu.
2. Observations : $n = 15$, $\bar{x} = 17,4$, $s = 3,63$ et $s^* = 3,76$.
On définit \bar{X}_{15} le nombre moyen de kilomètres effectués sur 15 habitants pris au hasard.
Comme X est supposée de loi normale, avec σ inconnu (et $n < 30$)

$$T_{15} = \frac{\bar{X}_{15} - \mu}{\frac{S_{sgrt15}^*}{15}} \sim \mathcal{T}(15)$$

avec S_{15}^* l'estimateur sans biais de σ

Avec les observations, un intervalle de confiance de μ au niveau 98% est :

$$[\bar{x} \pm Q_{T_{15}}(0,99) \frac{s^*}{15}] = [14,85; 19,95]$$

où $Q_{T_{15}}(0,99) = 2,624$.

Exercice 2

1. Population étudiée : accidents.
Variable étudiée X : durée (en minutes) entre l'annonce d'un accident et son arrivée sur les lieux. par des habitants de métropole.
 X est de une loi inconnue de moyenne μ et d'écart-type σ inconnu.
Observations : $n = 45$, $\bar{x} = 13,1$, $s^* = 6,37$.
On définit \bar{X}_{45} la durée moyenne de prise en charge sur 45 accidents pris au hasard.
Comme $n = 45 > 30$

$$Z_{45} = \frac{\bar{X}_{45} - \mu}{\frac{S_{45}^*}{45}} \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \text{approximativement}$$

avec S_{45}^* l'estimateur sans biais de σ
 Avec les observations, un intervalle de confiance de μ au niveau 90% est :

$$[\bar{x} \pm Q_{Z_{45}}(0, 95) \frac{s^*}{\sqrt{45}}] = [11, 54; 14, 66]$$

avec $Q_{Z_{45}}(0, 95) = 1, 645$.

2. On veut que $1, 645 \frac{s^*}{\sqrt{n}} \leq 1$, c'est-à-dire $n \geq (1, 645 * s^*/1)^2$, ou $n \geq 109, 84$.

Exercice 3

1. Population étudiée : clients renouvelant leur voiture.

Variable étudiée $X = 1$ si le client achète chez un concurrent ; $= 0$ sinon.

p est proportion de clients renouvelant leur voiture en achetant un modèle d'un concurrent.

Observations : $n = 500$, la proportion observée est $f_{500} = 0, 35$.

On définit F_{500} proportion empirique sur 500 clients pris au hasard.

Comme $n = 500 > 30$, si $500 * F_{500} \geq 5$ et si $500 * (1 - F_{500}) \geq 5$, alors

$$Z_{500} = \frac{F_{500} - p}{\sqrt{\frac{F_{500}(1-F_{500})}{500}}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{approximativement}$$

Avec les observations, les conditions ci-dessus sont bien vérifiées ($500 * 0, 35 \geq 5$ et $500 * (1 - 0, 35) \geq 5$) et un intervalle de confiance de p au niveau 95% est :

$$[F_{500} \pm Q_{Z_{500}}(0, 975) \sqrt{\frac{F_{500}(1 - F_{500})}{500}}] = [0, 308; 0, 392]$$

avec $Q_{Z_{500}}(0, 975) = 1, 96$.

Un intervalle de confiance de p au niveau 99% est :

$$[F_{500} \pm Q_{Z_{500}}(0, 995) \sqrt{\frac{F_{500}(1 - F_{500})}{500}}] = [0, 295; 0, 405]$$

avec $Q_{Z_{500}}(0, 995) = 2, 575$.

2. Le pourcentage de 40% appartient à l'intervalle de confiance pour un risque 99%. Mais celui n'y appartient pour un risque de 95% et est au-dessus des valeurs possibles pour p . Cela signifie que l'entreprise a des performances insuffisantes si on choisit un risque de 5% mais elles sont suffisantes si on choisit un risque de 1%.

Sujet 2

Exercice 1

1. Population étudiée : accidents.

Variable étudiée X : durée (en minutes) entre l'annonce d'un accident et son arrivée sur les lieux, par des habitants de métropole.

X est de une loi inconnue de moyenne μ et d'écart-type σ inconnu.

Observations : $n = 45$, $\bar{x} = 11,68$, $s^* = 5,28$.

On définit \bar{X}_{32} la durée moyenne de prise en charge sur 32 accidents pris au hasard.

Comme $n = 32 > 30$

$$Z_{32} = \frac{\bar{X}_{32} - \mu}{\frac{S_{32}^*}{\sqrt{32}}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{approximativement}$$

avec S_{32}^* l'estimateur sans biais de σ

Avec les observations, un intervalle de confiance de μ au niveau 90% est :

$$[\bar{x} \pm Q_{Z_{32}}(0, 95) \frac{s^*}{\sqrt{32}}] = [10,14; 13,21]$$

avec $Q_{Z_{32}}(0, 95) = 1,645$.

2. On veut que $1,645 \frac{s^*}{\sqrt{n}} \leq 1$, c'est-à-dire $n \geq (1,645 * s^*/1)^2$, ou $n \geq 3,02$.

Exercice 2

Population étudiée : habitants de métropole.

Variable étudiée X : nombre de kilomètres effectués par jour en voiture, par des habitants de métropole.

1. Pour construire un intervalle de confiance, on se base sur un échantillon de taille $n = 15 < 30$, donc il faut supposer que X suit une loi normale. On note μ la moyenne de X et σ l'écart-type de X , inconnu.
2. Observations : $n = 13$, $\bar{x} = 14,02$, $s = 3,74$ et $s^* = 3,898$.

On définit \bar{X}_{13} le nombre moyen de kilomètres effectués sur 13 habitants pris au hasard.

Comme X est supposée de loi normale, avec σ inconnu (et $n < 30$)

$$T_{13} = \frac{\bar{X}_{13} - \mu}{\frac{S_{\text{qrt}13}^*}{13}} \sim \mathcal{T}(13)$$

avec S_{13}^* l'estimateur sans biais de σ

Avec les observations, un intervalle de confiance de μ au niveau 98% est :

$$[\bar{x} \pm Q_{T_{13}}(0, 99) \frac{s^*}{13}] = [14,33; 20,13]$$

où $Q_{T_{13}}(0, 99) = 2,681$.

Exercice 3

1. Population étudiée : clients renouvelant leur voiture.

Variable étudiée $X = 1$ si le client achète chez un concurrent ; $= 0$ sinon.

p est proportion de clients renouvelant leur voiture en achetant un modèle d'un concurrent.

Observations : $n = 400$, la proportion observée est $f_{400} = 0,3$.

On définit F_{400} proportion empirique sur 400 clients pris au hasard.

Comme $n = 400 > 30$, si $400 * F_{400} \geq 5$ et si $400 * (1 - F_{400}) \geq 5$, alors

$$Z_{400} = \frac{F_{400} - p}{\sqrt{\frac{F_{400}(1-F_{400})}{400}}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{approximativement}$$

Avec les observations, les conditions ci-dessus sont bien vérifiées ($400 * 0,3 \geq 5$ et $400 * (1 - 0,3) \geq 5$) et un intervalle de confiance de p au niveau 95% est :

$$[F_{400} \pm Q_{Z_{400}}(0, 975) \sqrt{\frac{F_{400}(1 - F_{400})}{400}}] = [0, 255; 0, 345]$$

avec $Q_{Z_{400}}(0, 975) = 1,96$.

Un intervalle de confiance de p au niveau 99% est :

$$[F_{400} \pm Q_{Z_{400}}(0, 995) \sqrt{\frac{F_{400}(1 - F_{400})}{400}}] = [0, 241; 0, 359]$$

avec $Q_{Z_{400}}(0, 995) = 2,575$.

2. Le pourcentage de 35% appartient à l'intervalle de confiance pour un risque 99%. Mais celui n'y appartient pour un risque de 95% et est au-dessus des valeurs possibles pour p . Cela signifie que l'entreprise a des performances insuffisantes si on choisit un risque de 5% mais elles sont suffisantes si on choisit un risque de 1%.