EXERCICE 1 (10 points)

A. *Etude* d'*une fonction*

Soit f la fonction définie sur [0 ; + ∞ [par : $f(x) = \dfrac{3}{1+125\,504\,\mathrm{e}^{-1,9x}}$.

On désigne par C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$ où l'unité est deux centimètres.

1\. *a*. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} 125\,504\,\mathrm{e}^{-1,9x} = 0$; en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b. En déduire que la courbe C admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

2\. *a*. Démontrer que pour tout nombre réel x de [0 ; + ∞ [, $f'(x) = \dfrac{725\,372,8\,\mathrm{e}^{-1,9x}}{(1+125\,504\,\mathrm{e}^{-1,9x})^2}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans [0 ; + ∞ [.

c. Donner le tableau de variations de f sur [0 ; + ∞ [.

3\. *a*. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2}.

x	0	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	0	0,01						

b. Tracer la droite Δ et la courbe C dans le repère défini au début. Sur l'axe des abscisses, commencer la graduation à 3.

4\. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 2,5$.

On fera apparaître sur la figure les constructions utiles.

B. *Calcul intégral*

1\. Vérifier que, pour tout nombre réel x de [0 ; + ∞ [, $f(x) = \dfrac{3\,\mathrm{e}^{1,9x}}{\mathrm{e}^{1,9x}+125\,504}$.

2\. Soit F la fonction définie sur [0 ; + ∞ [par : $F(x) = \dfrac{3}{1,9}\ln(\mathrm{e}^{1,9x} + 125\,504)$.

Démontrer que F est une primitive de f sur [0 ; + ∞ [.

3\. *a*. Calculer la valeur moyenne V_m de f sur [0 ; 9].

b. Donnez la valeur approchée de V_m arrondie à 10^{-2} .

C. *Application de la partie A*

Dans cette partie, utiliser des résultats obtenus à la partie A.

On admet que le nombre de systèmes GPS vendus en France au cours de l'année (2000 + n) est égal à $f(n)$ millions où f et la fonction définie par la partie A.

1\. Déterminer le nombre de systèmes GPS vendus en France en 2005.

2\. Donné le nombre total de systèmes GPS vendus pendant les quatre années 2004, 2005, 2006 et 2007.

3\. Indiquer au cours de quelle année les ventes des systèmes GPS dépassent 2 500 000 unités.

EXERCICE 2. (10 points)

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Dans cet exercice, on s'intéresse aux factures comptabilisées chaque mois dans un grand garage.

A. Loi binomiale

Dans cette partie, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2} .

À la fin d'un mois donné, on considère une liasse importante de factures.

On note E l'événement : « une facture prélevée au hasard dans la liasse de factures est erronée. »

On suppose que $P(E) = 0,03$.

On prélève au hasard 20 factures dans la liasse pour vérification. La liasse contient assez de factures pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 20 factures.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de factures de ce prélèvement qui sont erronées.

1\. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2\. Calculer la probabilité qu'aucune facture de ce prélèvement ne soit erronée.

3\. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux factures soient erronées.

B. Loi normale

Dans cette partie, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2} .

À la fin d'un autre mois, on s'intéresse au montant de l'ensemble des factures éditées pendant ce mois.

On note Y la variable aléatoire qui à chaque facture prélevée au hasard dans l'ensemble des factures éditées pendant le mois, associe son montant en euros. On suppose que la variable aléatoire Y suit une loi normale de moyenne 840 et d'écart-type 400.

1\. Calculer $P(Y \leq 1500)$.

2\. Pour les factures dont le montant est supérieur ou égal à 600 euros et inférieur ou égal à 1500 euros, le garage propose le paiement en trois fois sans frais.

Calculer la probabilité qu'une facture prélevée au hasard dans l'ensemble des factures éditées pendant le mois puisse être réglée en trois fois sans frais, c'est-à-dire : $P(600 \leq Y \leq 1500)$.

C. *Probabilités conditionnelles*

Les factures du garage sont de deux types : les factures provenant de l'atelier de mécanique et la facture provenant de l'atelier de carrosserie.

On admet qu'un autre mois, 65 % des factures proviennent de l'atelier de mécanique et le reste de l'atelier de carrosserie.
Dans l'ensemble des factures de ce mois, 2 % des factures provenant de l'atelier de mécanique sont erronées et 1 % des factures provenant de l'atelier de carrosserie sont erronées.
On prélève au hasard une facture dans l'ensemble des factures de ce mois. Toutes les factures ont la même probabilité d'être prélevées.
On considère les événements suivants :
M : « la facture prélevée provient de l'atelier de mécanique » ;
C : « la facture prélevée provient de l'atelier de carrosserie » ;
D : « la facture est erronée. »

1. Déduire des informations figurant dans l'énoncé les probabilités $P(M)$, $P(C)$, $P_M(D)$ et $P_C(D)$.
(On rappelle que $P_M(D) = P(D / M)$ est la probabilité de l'événement D sachant que l'événement M est réalisé).

2. *a*. Calculer les valeurs exactes des probabilités $P(D \cap M)$ et $P(D \cap C)$.

2. *b*. Déduire de ce qui précède $P(D)$.

3. Calculer la probabilité que la facture prélevée provienne de l'atelier de carrosserie sachant qu'elle est erronée. À arrondir à 10^{-4}.

CORRECTION

EXERCICE 1 (10 points)

A. *Etude* d'*une fonction*

1. *a*. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} 125\,504\ \mathrm{e}^{-1,9x} = 0$; donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + 125\,504\ \mathrm{e}^{-1,9x} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$.

b. La courbe C admet une asymptote Δ d'équation $y = 3$

2. *a*. La dérivée de e^u est $u'\ \mathrm{e}^u$ ici $u(x) =- 1,9\,x$ donc $u'(x) = -1,9$ donc la dérivée de $125\,504\ \mathrm{e}^{1,9x}$ est $125\,504 \times (-1,9)\ \mathrm{e}^{1,9x}$ soit $238457,6\ \mathrm{e}^{-1,9x}$

$$\begin{cases} u(t) = 3 & u'(t) = 0 \\ v(t) = 1 + 125\,504\ \mathrm{e}^{-1,9x} & v'(t) = -238457,6\ \mathrm{e}^{-1,9x} \end{cases} \quad \text{donc } f'(x) = \frac{0 - (-238457,6\ \mathrm{e}^{-1,9x})}{(1 + 125\,504\ \mathrm{e}^{-1,9x})^2} = \frac{725\,372,8\ \mathrm{e}^{-1,9x}}{(1 + 125\,504\ \mathrm{e}^{-1,9x})^2}$$

b. La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x) > 0$ lorsque x varie dans $[0 ; +\infty[$.

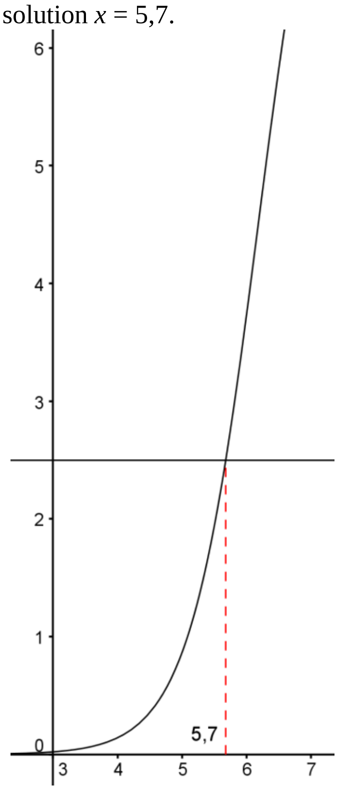
c.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$f(0)$ ↗	3

3. *a*.

x	0	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	0	0,01	0,05	0,29	1,25	2,48	2,91	2,99

3. *b*. 4. Graphiquement l'équation $f(x) = 2,5$ a pour solution $x = 5,7$.



B. *Calcul intégral*

1. $f(x) = \dfrac{3}{1+125\,504\,e^{-1,9x}}$ donc en multipliant numérateur et dénominateur par $e^{1,9x}$:

$f(x) = \dfrac{3\,e^{1,9x}}{(1+125\,504\,e^{-1,9x})\,e^{1,9x}}$ donc en développant puisque $e^{a} \times e^{-a} = e^{a-a} = e^{0} = 1$donc $f(x) = \dfrac{3\,e^{1,9x}}{e^{1,9x}+125\,504}$.

2. La dérivée de ln u est $\dfrac{u'}{u}$, la dérivée de e^{u} est $u'\,e^{u}$ donc la dérivée de $e^{1,9x} + 125\,504$ est $1,9\,e^{1,9x}$

La dérivée de ln $[e^{1,9x} + 125\,504]$ est $\dfrac{1,9\,e^{1,9x}}{e^{1,9x}+125\,504}$ donc $F'(x) = \dfrac{3}{1,9} \times \dfrac{1,9\,e^{1,9x}}{e^{1,9x}+125\,504} = \dfrac{3\,e^{1,9x}}{e^{1,9x}+125\,504} = f(x)$

F est une primitive de f sur $[0 ; +\infty[$.

3. *a*. La valeur moyenne V_m de f sur $[0 ; 9]$ est $\dfrac{1}{9-0}\displaystyle\int_{1}^{9} f(x)\,dx = \dfrac{1}{9}[F(9) - F(0)]$

$F(9) = \dfrac{3}{1,9}\ln(e^{1,9\times 9} + 125\,504) = \dfrac{3}{1,9}\ln(e^{17,1} + 125\,504)$

et $F(0) = \dfrac{3}{1,9}\ln(e^{1,9\times 0} + 125\,504) = \dfrac{3}{1,9}\ln(125\,505)$

$V_m = \dfrac{1}{9} \times \dfrac{3}{1,9}[\ln(e^{17,1} + 125\,504) - \ln(125\,505)] = \dfrac{1}{5,7}[\ln(e^{17,1} + 125\,504) - \ln(125\,505)]$

b. La valeur approchée de V_m arrondie à 10^{-2} est 0.94

C. *Application de la partie A*

Dans cette partie, utiliser des résultats obtenus à la partie A.

On admet que le nombre de systèmes GPS vendus en France au cours de l'année (2000 + *n*) est égal à $f(n)$ millions où f et la fonction définie par la partie A.

1. Le nombre de systèmes GPS vendus en France en 2005 est $f(5) = 0,29$ millions
2. Le nombre total de systèmes GPS vendus pendant les quatre années 2004, 2005, 2006 et 2007 est $f(4) + f(5) + f(6) + f(7)$ soit 4,06 millions de GPS.

3. La fonction f est croissante sur $[0 ; +\infty[$, $f(7) = 2,48$ et $f(8) = 2,91$ donc au cours de la huitième année les ventes des systèmes GPS dépassent 2 500 000 unités.

EXERCICE 2. (10 points)

A. Loi binomiale

1. On a une succession de 20 expériences aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :
   - réussite : la facture est erronée ($p = 0,03$)
   - échec : la facture n'est pas erronée ($q = 1 - p = 0,97$)

donc la variable aléatoire X qui compte le nombre de factures erronées, suit une loi binomiale de paramètres (20 ; 0,03).

2. $p(X = 0) = 0,55$
3. $p(X \le 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = 0,98$

B. Loi normale

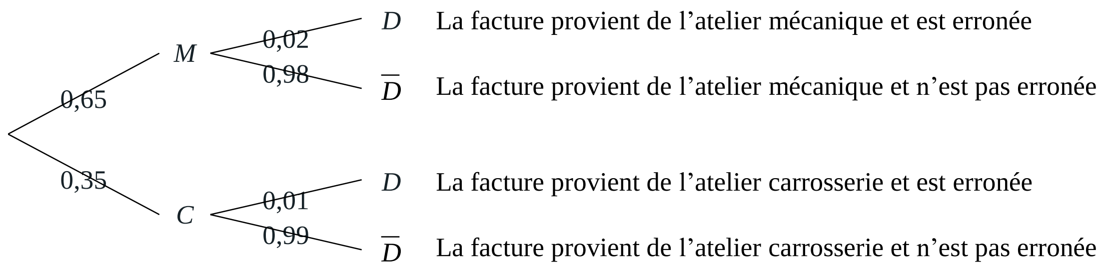
Soit $T = \dfrac{Y - 840}{400}$, T suit une loi normale centrée réduite

1. $P(Y \le 1500) = P\left(T \le \dfrac{1500-840}{400}\right) = P(T \le 1,65) = 0,95$
2. $P(600 \le Y \le 1500) = P\left(\dfrac{600-840}{400} T \le \dfrac{1500-840}{400}\right) = P(-0,6 \le T \le 1,65) = P(T \le 1,65) - P(T \le -0,6)$

$P(600 \le Y \le 1500) = P(T \le 1,65) - [1 - P(T \le 0,6)] = 0,9505 - [1 - 0,7257] = 0,68$

C. *Probabilités conditionnelles*

<u>Solution avec un arbre de choix :</u>



1. 65 % des factures proviennent de l'atelier de mécanique et le reste de l'atelier de carrosserie donc $P(M) = 0{,}65$ et $P(C) = 1 - P(M) = 0{,}35$

2 % des factures provenant de l'atelier de mécanique sont erronées donc $P_M(D) = 0{,}02$

1 % des factures provenant de l'atelier de carrosserie sont erronées donc $P_C(D) = 0{,}01$

2. *a*. $P(D \cap M) = 0{,}65 \times 0{,}02 = 0{,}0130$

et $P(D \cap C) = 0{,}35 \times 0{,}01 = 0{,}0035$

2. *b*. $P(D) = P(D \cap M) + P(D \cap C) = 0{,}013 + 0{,}0035 = 0{,}0165$

3. $P_D(C) = \dfrac{P(C \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0{,}0035}{0{,}0165} = 0{,}2121$

<u>Solution avec un tableau :</u>

	M	*C*	Total
D	0,02 × 65 = 1,3	35 × 0,01 = 0,35	1,65
$\overline{D}$	65 – 1,3 = 63,7	35 – 0,35 = 34,65	98,35
Total	65	35	100

$P_D(C) = \dfrac{0{,}35}{1{,}65} = 0{,}2121$