المتتاليات

الثانية سلك بكالوريا علوم تجريبية

I- المتتاليات: تعاريف و خاصيات

1- تعريف

ليكن I جزء من $\mathbb{N}$
المتتالية العددية هي تطبيق من I نحو $\mathbb{R}$

اصطلاحات

*- $u: \quad I \to \mathbb{R}$ متتالية عددية

يرمز لصورة n بواسطة u_n عوض $u(n)$. العدد u_n يسمى حد المتتالية ذا المدل n ويسمى أيضا الحد العام.

يرمز للمتتالية بـ $(u_n)_{n\in I}$ عوض u.

$\{u_n / n \in I\}$ هي مجموعة قيم المتتالية $(u_n)_{n\in I}$.

*- اذا كان $I = \mathbb{N}$ فانه يرمز للمتتالية بـ $(u_n)_{n\geq 0}$ أو (u_n)

❖ اذا كان $I = \mathbb{N}^*$ فانه يرمز للمتتالية بـ $(u_n)_{n\geq 1}$

❖ اذا كان $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ فانه يرمز للمتتالية أيضا بـ $(u_n)_{n\geq n_0}$

2- المتتالية المكبورة – المتتالية المصغورة

تعريف

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ مكبورة اذا وفقط اذا وجد عدد حقيقي M بحيث $\forall n \in I \quad u_n \leq M$

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ مصغورة اذا وفقط اذا وجد عدد حقيقي m بحيث $\forall n \in I \quad u_n \geq m$

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ محدودة اذا وفقط اذا كانت $(u_n)_{n\in I}$ مكبورة و مصغورة

ملاحظة $(u_n)_{n\in I}$ محدودة $\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall n \in I \quad |u_n| \leq k$

رتابة متتالية

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية حيث $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية تزايدية $\Leftrightarrow \quad \forall n \in I \quad u_{n+1} \geq u_n$

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية تزايدية قطعا $\Leftrightarrow \quad \forall n \in I \quad u_{n+1} \succ u_n$

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية تناقصية $\Leftrightarrow \quad \forall n \in I \quad u_{n+1} \leq u_n$

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية تناقصية قطعا $\Leftrightarrow \quad \forall n \in I \quad u_{n+1} \prec u_n$

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية ثابتة $\Leftrightarrow \quad \forall n \in I \quad u_{n+1} = u_n$

3- المتتالية الحسابية

تعريف

تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ حسابية اذا كان يوجد عدد حقيقي r بحيث $\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = u_n + r$
العدد r يسمى أساس المتتالية .

الخاصية المميزة

تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ حسابية اذا وفقط اذا كان $\forall n \succ n_0 \quad u_n = \dfrac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$

صيغة الحد العام

خاصية

اذا كان $\left(u_n\right)_{n\geq n_0}$ متتالية حسابية أساسها r فان $u_n=u_{n_0}+\left(n-n_0\right)r \quad \forall n\geq n_0$

ملاحظة

- اذا كان $\left(u_n\right)$ متتالية حسابية أساسها r فان $u_n=u_0+nr \quad \forall n\in\mathbb{N}$
- اذا كان $\left(u_n\right)_{n\geq 1}$ متتالية حسابية أساسها r فان $u_n=u_1+\left(n-1\right)r \quad \forall n\geq 1$
- اذا كان $\left(u_n\right)_{n\geq n_0}$ متتالية حسابية أساسها r فان $u_n=u_p+\left(n-p\right)r \quad \forall n\geq p\geq n_0$

مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية

لتكن $\left(u_n\right)_{n\geq n_0}$ متتالية حسابية

اذا كان $S_n=u_p+u_{p+1}...............+u_{n-1}$ فان $S_n=\dfrac{\left(n-p\right)\left(u_p+u_{n-1}\right)}{2}$

$n-p$ هو عدد حدود المجموع S_n و u_p هو الحد الأول للمجموع S_n و u_{n-1} هو الحد الأخير للمجموع S_n

ملاحظة

- اذا كان $\left(u_n\right)$ متتالية حسابية فان S_n مجموع n حدا أولا منها هو

$$S_n=u_0+u_1...............+u_{n-1}=\frac{n\left(u_0+u_{n-1}\right)}{2}$$

- اذا كان $\left(u_n\right)_{n\geq 1}$ متتالية حسابية فان S_n مجموع n حدا أولا منها هو

$$S_n=u_1+u_2...............+u_n=\frac{n\left(u_1+u_n\right)}{2}$$

4- المتتالية الهندسية

تعريف

تكون متتالية $\left(u_n\right)_{n\geq n_0}$ هندسية اذا كان يوجد عدد حقيقي q بحيث $u_{n+1}=qu_n \quad \forall n\geq n_0$

العدد q يسمى أساس المتتالية .

الخاصية المميزة

تكون متتالية $\left(u_n\right)_{n\geq n_0}$ هندسية اذا وفقط اذا كان $u_n{}^2=u_{n+1}\cdot u_{n-1} \quad \forall n\succ n_0$

صيغة الحد العام

خاصية

اذا كان $\left(u_n\right)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q فان $u_n=u_{n_0}q^{n-n_0} \quad \forall n\geq n_0$

ملاحظة

- اذا كان $\left(u_n\right)$ متتالية هندسية أساسها q فان $u_n=u_0q^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$
- اذا كان $\left(u_n\right)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية أساسها q فان $u_n=u_1q^{n-1} \quad \forall n\geq 1$
- اذا كان $\left(u_n\right)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q فان $u_n=u_pq^{n-p} \quad \forall n\geq p\geq n_0$

مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية

لتكن $\left(u_n\right)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q يخالف 1

اذا كان $S_n=u_p+u_{p+1}...............+u_{n-1}$ فان $S_n=u_p\left(\dfrac{1-q^{n-p}}{1-q}\right)$

$n-p$ هو عدد حدود المجموع S_n و u_p هو الحد الأول للمجموع S_n

ملاحظة

- اذا كان (u_n) متتالية هندسية أساسها q يخالف 1 فان S_n مجموع n حدا أولا منها هو

$$S_n = u_0 + u_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + u_{n-1} = u_0\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

- اذا كان $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية أساسها q يخالف 1 فان $S_n S_n$ مجموع n حدا أولا منها هو

$$S_n = u_1 + u_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + u_n = u_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

حالة خاصة

اذا كانت $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها 1 فان $S_n = u_p + u_{p+1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + u_{n-1} = u_p(n-p)$

نهايات المتتاليات

II- نهايات المتتاليات

1- تعاريف

$$\lim u_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall A \succ 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad u_n \succ A$$

$$\lim u_n = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall A \succ 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad u_n \prec -A$$

$$\lim u_n = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon \succ 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |u_n - l| \prec \varepsilon$$

تعريف

نقول إن متتالية متقاربة إذا و فقط كانت نهايتها منتهية.
نقول إن متتالية متباعدة إذا وفقط إذا كانت غير متقاربة.

2- مصادق التقارب

مصداق1 لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية و $(v_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية متقاربة لأعداد حقيقية موجبة

l عدد حقيقي حيث $|u_n - l| \leq v_n \quad \forall n \geq N \quad \exists N \in \mathbb{N}$.

اذا كان $\lim v_n = 0$ فان $(u_n)_{n\geq n_0}$ متقاربة و $\lim u_n = l$

مصداق2 لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ و $(v_n)_{n\geq n_0}$ متتاليتين عدديتين حيث $u_n \leq v_n \quad \forall n \geq N \quad \exists N \in \mathbb{N}$

اذا كان $\lim u_n = +\infty$ فان $\lim v_n = +\infty$

اذا كان $\lim v_n = -\infty$ فان $\lim u_n = -\infty$

لازمة

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ و $(v_n)_{n\geq n_0}$ و $(w_n)_{n\geq n_0}$ ثلاث متتاليات حيث

$$v_n \leq u_n \leq w_n \quad \forall n \geq N \quad \exists N \in \mathbb{N}$$

اذا كان $\lim v_n = \lim w_n = l$ فان $\lim u_n = l$

3- نهاية q^n

خاصية

اذا كان $q \succ 1$ فان $\lim q^n = +\infty$

اذا كان $q = 1$ فان $\lim q^n = 1$

اذا كان $-1 \prec q \prec 1$ فان $\lim q^n = 0$

اذا كان $q \leq -1$ فان (q^n) ليست لها نهاية

ملاحظة

*- المتتالية (q^n) متقاربة اذا كان $-1 \prec q \leq 1$

*- ليكن $r \in \mathbb{Q}^*$

إذا كان $r \succ 0$ فان $\lim_{+\infty} n^r = +\infty$

إذا كان $r \prec 0$ فان $\lim_{+\infty} n^r = 0$

4- خاصيات

خاصية

كل متتالية متقاربة و موجبة تكون نهايتها موجبة

مبرهنة

كل متتالية تزايدية و مكبورة هي متتالية متقاربة
كل متتالية تناقصية و مصغورة هي متتالية متقاربة

ملاحظة كل متتالية تزايدية و سالبة هي متتالية متقاربة
كل متتالية تناقصية و موجبة هي متتالية متقاربة

5- متتاليات من نوع $f(u_n)$

خاصية

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة بالعلاقة $u_{n+1} = f(u_n)$ بحيث يوجد مجال I ضمن D_f و N من $\mathbb{N}$
حيث $u_n \in I \quad \forall n \geq N$ و f متصلة على I و $f(I) \subset I$.
اذا كانت (u_n) متتالية متقاربة فان نهايتها هي حل للمعادلة $f(l) = l$

تمرين

نعتبر (u_n) متتالية حيث $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(1-u_n)$ و $u_0 = \frac{1}{2}$

بين أن (u_n) متقاربة و حدد نهايتها

تمارين حول المتتاليات

الثانية سلك بكالوريا علوم تجريبية

تمرين1

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بـ $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+1$ و $u_1=1$

1- أحسب u_2 ; u_3

2- بين أن $u_n \prec 2$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

3- بين أن $(u_n)_{n\geq 1}$ تزايدية .

تمرين2

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{4}{u_n}\right)$ و $u_0=\frac{5}{2}$

1- أحسب u_1 ; u_2

2- بين أن $u_n \succ 2$ $\forall n\in\mathbb{N}$

3- بين أن (u_n) تناقصية و استنتج أن $u_n\leq\frac{5}{2}$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

4- أ- تأكد أن $\left(u_n-2\right)$ $u_{n+1}-2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{u_n}\right)\left(u_n-2\right)$ $\forall n\in\mathbb{N}$

ب- بين أن $0\prec u_{n+1}-2\leq\frac{1}{10}\left(u_n-2\right)$ $\forall n\in\mathbb{N}$

ج- استنتج أن $0\prec u_n-2\leq\left(\frac{1}{10}\right)^n\times\frac{1}{2}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ثم حدد $\lim u_n$

تمرين3

نعتبر المتتاليتين المعرفتين بـ

$$\begin{cases} u_0=1 \quad ; \quad u_1=3 \\ u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n \qquad \forall n\in\mathbb{N}\end{cases} \qquad v_n=u_{n+1}-u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

1- بين أن (v_n) متتالية ثابتة .

2- استنتج أن (u_n) متتالية حسابية و حدد عناصرها المميزة .

3- أحسب $S_n=\sum_{i=1}^{i=n}v_i$ بدلالة n. ثم أحسب $S'_n=\sum_{i=1}^{i=n}u_i$ بدلالة n.

تمرين4

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بـ

$$\begin{cases} u_1=2 \\ u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2\end{cases}$$

1- أحسب u_2 ; u_3

2- بين أن $u_n\prec 3$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

3- أدرس رتابة $(u_n)_{n\geq 1}$ و استنتج أن $u_n\geq 2$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

4- نعتبر المتتالية العددية $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بـ $v_n=u_n-3$

أ- بين أن $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية و أحسب v_n بدلالة n .

ب- أحسب $S_n=\sum_{i=1}^{i=n} u_i$ بدلالة n.

تمرين5

لتكن (u_n) و (v_n) المتتاليتين المعرفتين بمايلي

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=5-\dfrac{9}{u_n+1} \end{cases} \qquad v_n=\frac{1}{u_n-2}$$

1- بين أن (v_n) متتالية حسابية و أحسب v_n بدلالة n

2- حدد $\lim u_n$

تمرين6

لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ متتاليتين عدديتين معرفتين بما يلي

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n+2v_n}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1=12 \\ v_{n+1}=\dfrac{u_n+3v_n}{4} \end{cases}$$

1- نضع $w_n=v_n-u_n \qquad \forall n\in\mathbb{N}^*$

أ- بين أن $(w_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية و أحسب w_n بدلالة n

ب- حدد $\lim w_n$

2-- أ- بين أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية تزايدية و أن $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية تناقصية

ب- بين أن $u_n \prec v_n \qquad \forall n\in\mathbb{N}^*$

ج- استنتج أن $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ متقاربتين

تمرين7

لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ متتاليتين عدديتين معرفتين بما يلي $u_1=2$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\qquad u_{n+1}=\frac{5u_n+3}{u_n+3}\quad ;\quad v_n=\frac{u_n-3}{u_n+1}$$

1- أحسب u_2 و u_3 و v_2

2- بين أن $0\leq u_n\leq 3 \qquad \forall n\in\mathbb{N}^*$

3- أدرس رتابة $(u_n)_{n\geq 1}$

4- أ- بين أن $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية و أحسب v_n بدلالة n

ب- أحسب بدلالة n المجموع $S_n=\sum_{i=1}^{i=n} v_i$ ثم حدد $\lim S_n$

تمرين8

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين معرفتين بما يلي $v_n=u_{n+1}-u_n$; $\begin{cases} u_0=1 \quad u_1=3 \\ u_{n+2}=8u_{n+1}-7u_n \end{cases}$

1- أحسب u_3 و v_2 .

2- بين أن (v_n) متتالية هندسية و أحسب v_n بدلالة n.

3- أحسب بدلالة n المجموع $S_n=\sum_{i=0}^{i=n-1} v_i$ ثم استنتج u_n بدلالة n .

تمرين 9

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بـ
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$$

1- بين أن $u_n \prec 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

2- بين أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية تزايدية و استنتج أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية متقاربة .

3- أ- بين أن $2-u_{n+1} \prec \frac{2-u_n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

ب- بين أن $0 \prec 2-u_n \prec \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

ج- استنتج $\lim u_n$

تمرين10

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n(u_n+1) \end{cases}$$

1- أحسب u_1 و u_2.

2- بين أن (u_n) متتالية تزايدية.

3- بين أن $u_{n+1} \succ 2u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ و استنتج $u_n \succ 3\times 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

4- أحسب $\lim u_n$

تمرين11

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ
$$\begin{cases} u_0 = -\frac{5}{4} \\ u_{n+1} = (u_n+2)^2 - 2 \end{cases}$$

1- بين أن $-2 \prec u_n \prec -1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

2- بين أن (u_n) متتالية تناقصية .

3- استنتج أن (u_n) متقاربة .

4- أحسب $\lim u_n$.

تمرين12

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين معرفتين بما يلي $v_n = u_{n+1} - u_n \quad ; \quad \begin{cases} u_0 = 0 \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 10u_{n+1} - 9u_n \end{cases}$

1- أعط تعبير u_n بدلالة n

2- بين أن (v_n) متتالية هندسية بدون استعمال السؤال 1 و أحسب v_n بدلالة n.

ثم أحسب بدلالة n المجموع $S_n=\sum_{i=0}^{i=n-1} v_i$

3 - نضع $w_n = u_{n+1} - 9u_n$

بين (w_n) ثابثة و استنتج أن $u_{n+1} = 9u_n + 1$

4- أحسب $S'_n = \sum_{i=0}^{i=n-1} u_i$

تمرين 13

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $\begin{cases} u_0 = -1 \quad ; \quad u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases}$

1- أحسب $u_2 \quad ; \quad u_3$

2- نعتبر المتتاليتين (a_n) و (b_n) حيث $a_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \quad ; \quad b_n = 2^n u_n$

أ- بين أن (a_n) متتالية هندسية و أحسب a_n بدلالة n

ب- بين أن (b_n) متتالية حسابية و أحسب b_n بدلالة n

ت- استنتج u_n بدلالة n

3- أ- بين بالترجع $\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ب- حدد $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n}$ ثم $\lim u_n$