LES FONCTIONS LOGARITHMES الدوال اللوغاريتمية

الدالة : $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x)$ تسمى دالة اللوغاريتم النبيري

وهي الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على $\mathbb{R}_+^*$ و التي تنعدم في 1.

ولدينا :
$$\begin{cases} \forall x \in \left]0;+\infty\right[\quad ; \quad \left[\ln(x)\right]' = \frac{1}{x} \\ \ln(1) = 0 \end{cases}$$

$$\ln 1 = 0 \; ; \; \ln e = 1 \; ; \; \ln\frac{1}{e} = -1 \; ; \; \ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}$$
$$avec \;\; e = 2{,}718281828 \;\; \text{et } e \notin \mathbb{Q} \text{ mais } e \in \mathbb{R}$$

$\forall a \in \mathbb{R}_+^*; \forall b \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad \forall r \in \mathbb{Q}$

* $\boxed{\ln(a \times b) = \ln a + \ln b}$

* $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ * $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

* $\ln(a^r) = r\ln a$ * $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln a$

*النهايات عند المحدات :
$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

*الرتابة :
$$(\ln a = \ln b) \Leftrightarrow (a = b)$$
$$(\ln a > \ln b) \Leftrightarrow (a > b)$$

*الدالة $\ln$ تزايدية قطعا على المجال $\left]0;+\infty\right[$

الإشارة

$$\forall x \in \left]0;+\infty\right[; \begin{cases} (x > 1) \Leftrightarrow (\ln x > 0) \\ (0 < x < 1) \Leftrightarrow (\ln x < 0) \\ (1 < x < e) \Leftrightarrow (0 < \ln x < 1) \\ (x > e) \Leftrightarrow (\ln x > 1) \end{cases}$$

***نهايات مرجعية :**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$$
$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

حالة عامة :
$$\lim_{x\to 0^+} \left[x\left[\ln(x)\right]^n\right] = 0 \;\; ; \forall n \in \mathbb{N}^*$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left[\ln(x)\right]^n}{x} = 0$$

الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس a :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}; \forall x \in \mathbb{R}_+^*; L\text{og}_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$
$$L\text{og}_a 1 = 0 \quad ; \quad L\text{og}_a(a) = 1$$
$$\forall r \in \mathbb{Q} \quad ; \quad \begin{cases} L\text{og}_a(x^r) = rL\text{og}_a x \\ L\text{og}_a(a^r) = r \end{cases}$$
$$L\text{og}_a'(x) = \frac{1}{x\ln a}$$

*الدالة $\ln$ هي دالة اللوغاريتم ذات الأساس e
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*; Log_e x = \ln x$$

اللوغاريتم العشري :

دالة اللوغاريتم ذات الأساس 10تسمى اللوغاريتم العشري

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*; \log_{10} x = \log x$$
$$\log 1 = 0; \log 10 = 1$$
$$\forall m \in \mathbb{Z}; \log(10^m) = m$$

***المشتقة اللوغاريتمية :**

$$\forall x \in I; \left(\ln\left|U(x)\right|\right)' = \frac{U'(x)}{U(x)}$$

مع $U(x)$ لا تنعدم على المجال I

LES FONCTIONS EXPONENTIELLES الدوال الأسية

*الدالة $\ln$ متصلة و تزايدية قطعا على المجال $]0;+\infty[$.

إذن فهي تقابل من $]0;+\infty[$ نحو $\mathbb{R}$.

دالتها العكسية تسمى :الدالة الأسية النبيرية .

و هي الدالة المعرفة كما يلي : $\boxed{\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto e^x\end{array}}$

ولدينا:

$$\forall x \in \mathbb{R}; \forall y \in \mathbb{R}_+^* \left(e^x = y\right) \Leftrightarrow (\ln y = x)$$
$$\forall x \in \mathbb{R}; \ln\left(e^x\right) = x$$
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*; e^{\ln x} = x$$

* $e^{-1} = \dfrac{1}{e}$; $e^0 = 1$; $e^1 = e$

*الدالة $x \mapsto e^x$ متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

* $$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2; \begin{cases} (e^x = e^y) \Leftrightarrow (x = y) \\ (e^x > e^y) \Leftrightarrow (x > y) \end{cases}$$

* $$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

* $$\forall x \in \mathbb{R}; e^x > 0$$

* $$\forall x \in \mathbb{R}; \left(e^x\right)' = e^x$$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
exp'	+
exp	$\nearrow$

نهايات مرجعية:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

و بصفة عامة :

$$\forall n \in \mathbb{N}; \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0 \end{cases}$$

$$\forall a \in \mathbb{R}; \forall b \in \mathbb{R} \begin{cases} e^a \times e^b = e^{a+b} \\ \dfrac{1}{e^a} = e^{-a} \\ \dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b} \\ \left(e^a\right)^r = e^{ra}, \forall r \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

*إذا كانت U دالة قابلة للإشتقاق على مجال I

فإن الدالة : $x \mapsto e^{U(x)}$ قابلة للإشتقاق على I

و لكل x من I :

$$\boxed{\left(e^{U(x)}\right)' = U'(x)e^{U(x)}}$$

*لكل عددحقيقي a موجب قطعا و يخالف 1 ، الدالة اللوغارتمية ذات الأساس a تقابل من $\mathbb{R}_+^*$ نحو $\mathbb{R}$. ودالتها العكسية تسمى : الدالة الأسية ذات الأساس a .

و هي الدالة المعرفة كما يلي: $\boxed{\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto a^x\end{array}}$ $\forall a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

و لدينا:

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}; \forall x \in \mathbb{R}; \forall y \in \mathbb{R}_+^* \begin{cases} Log_a(y) = x \Leftrightarrow a^x = y \\ Log(a^x) = x \\ a^{Log_a(y)} = y \end{cases}$$

$$\begin{array}{l}\forall a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\} \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\end{array} \begin{cases} a^x a^y = a^{x+y} \\ \dfrac{1}{a^x} = a^{-x} \\ \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \\ (a^x)^y = a^{xy} \end{cases}$$

و نقبل أن : $\forall x \in \mathbb{R} \ ; \ 1^x = 1$

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}; \forall x \in \mathbb{R}; a^x = e^{x \ln a}$$