

# Les suites

## Théorème des gendarmes

Ce cours porte exclusivement sur le théorème des gendarmes appliqué aux suites.

### 1 L'idée générale

Une suite est un opérateur qui associe automatiquement à un nombre entier, appelé antécédent, un nombre réel, appelé image.

Une suite est telle qu'un antécédent n'a qu'une seule image, mais qu'une image peut avoir plusieurs antécédents.

### 2 La théorie

#### 2.1 Le théorème des gendarmes, limite finie

Soit  $\ell \in \mathbb{R}$ .

Soient  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  trois suites.

Si, à partir d'un certain rang,  $u_n \leq v_n \leq w_n$ , et si les suites  $(u_n)$  et  $(w_n)$  convergent vers  $\ell$ , alors la suite  $(v_n)$  converge aussi vers  $\ell$ .

#### 2.2 Le théorème des gendarmes, limite infinie

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites.

Si, à partir d'un certain rang,  $u_n \geq v_n$ , et si la suite  $(v_n)$  diverge vers  $+\infty$ , alors la suite  $(u_n)$  diverge aussi vers  $+\infty$ .

Si, à partir d'un certain rang,  $u_n \leq v_n$ , et si la suite  $(v_n)$  diverge vers  $-\infty$ , alors la suite  $(u_n)$  diverge aussi vers  $-\infty$ .

### 3 Les astuces

Le théorème des gendarmes constitue un moyen de démontrer la convergence ou la divergence d'une suite en la comparant par exemple à des suites de référence.

## 4 Exercices pratiques

### 4.1 Exercice 1

Soit la suite  $(u_n)$  définie  $\forall n \in \mathbb{N}_*$  par :  $u_n = \frac{6n + 5 \times (-1)^n}{3n}$ .  
Déterminer la convergence de la suite  $(u_n)$ .

La difficulté de l'expression de  $u_n$  réside dans le terme  $(-1)^n$ . Or,  $(-1)^n$  est borné :  $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ .

On peut alors définir les suites  $(v_n)$  et  $(w_n)$  à partir de l'expression de  $u_n$ , en remplaçant le terme  $(-1)^n$  respectivement par ses bornes, ce qui fournit :

$$v_n = \frac{6n - 5}{3n} \text{ et } w_n = \frac{6n + 5}{3n}$$

Il s'agit maintenant de déterminer la convergence des suites  $(v_n)$  et  $(w_n)$ .

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n - 5}{3n} = 2 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n + 5}{3n} = 2 \end{aligned}$$

Les suites  $(v_n)$  et  $(w_n)$  convergent donc vers 2.

Par conséquent, les suites  $(v_n)$  et  $(w_n)$  sont telles que :  $\forall n \in \mathbb{N}_* v_n \leq u_n \leq w_n$ , et convergent vers 2. Donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite  $(u_n)$  converge aussi vers 2.

### 4.2 Exercice 2

Soit la suite  $(u_n)$  définie  $\forall n \in \mathbb{N}_*$  par :  $u_n = \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n}$ .  
Déterminer la convergence de la suite  $(u_n)$ .

L'expression de  $u_n$  peut être considérablement simplifiée à condition de s'affranchir de la racine carrée. Pour ce faire, la méthode consiste à encadrer le terme sous la racine carrée au moyen de carrés. On peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}_* n^2 < n^2 + 1 < (n + 1)^2$$

On peut alors définir les suites  $(v_n)$  et  $(w_n)$  à partir de l'expression de  $u_n$ , en remplaçant le terme sous la racine carrée par son encadrement, ce qui fournit :

$$v_n = \frac{\sqrt{n^2}}{n} = 1 \text{ et } w_n = \frac{\sqrt{(n + 1)^2}}{n} = \frac{n + 1}{n}$$

Il s'agit maintenant de déterminer la convergence des suites  $(v_n)$  et  $(w_n)$ .

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + 1}{n} = 1 \end{aligned}$$

Les suites  $(v_n)$  et  $(w_n)$  convergent donc vers 1.

Par conséquent, les suites  $(v_n)$  et  $(w_n)$  sont telles que :  $\forall n \in \mathbb{N}_* v_n \leq u_n \leq w_n$ , et convergent vers 1. Donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite  $(u_n)$  converge aussi vers 1.

### 4.3 Exercice 3

Soit la suite  $(u_n)$  définie  $\forall n > 1$  par :  $u_n = \frac{n + \sin n}{n - \sin n}$ .  
Déterminer la convergence de la suite  $(u_n)$ .

La difficulté de l'expression de  $u_n$  réside dans les termes  $\sin n$ , sachant que la fonction  $\sin$  est sinusoidale.

Or,  $\sin n$  est borné :  $-1 \leq -\sin n \leq 1$ , donc  $n - 1 \leq n - \sin n \leq n + 1$ . Comme  $n > 1$ , les termes  $n - 1$ ,  $n - \sin n$  et  $n + 1$  sont strictement positifs, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{1}{n + 1} \leq \frac{1}{n - \sin n} \leq \frac{1}{n - 1}$$

De même,  $-1 \leq \sin n \leq 1$ , donc  $n - 1 \leq n + \sin n \leq n + 1$ . Comme  $n > 1$ , les termes  $n - 1$ ,  $n + \sin n$  et  $n + 1$  sont strictement positifs, ce qui autorise la multiplication membre à membre suivante :

$$\frac{n - 1}{n + 1} \leq \frac{n + \sin n}{n - \sin n} \leq \frac{n + 1}{n - 1}$$

Cette double inégalité permet de définir les suites  $(v_n)$  et  $(w_n)$ , dont il faut maintenant déterminer la convergence.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n - 1}{n + 1} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + 1}{n - 1} = 1$$

Les suites  $(v_n)$  et  $(w_n)$  convergent donc vers 1.

Par conséquent, les suites  $(v_n)$  et  $(w_n)$  sont telles que :  $\forall n > 1$ ,  $v_n \leq u_n \leq w_n$ , et convergent vers 1. Donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite  $(u_n)$  converge aussi vers 1.