Limites de suites

I. Généralités sur les limites de suites

1. Suite convergente

On considère qu'une suite admet une limite l, ou converge vers l, lorsque :

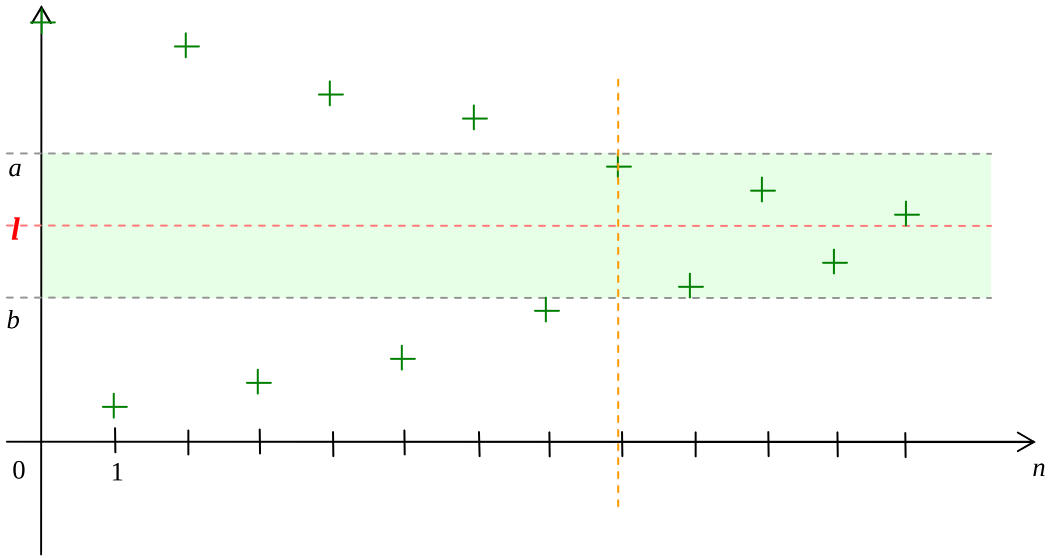
tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

En termes plus formels :

Quelque soient a, b tels que $l \in \left]a,b\right[$, il existe un rang N tel que pour tout indice n, on ait :

$$n > N \Rightarrow u_n \in \left]a,b\right[$$

Interprétation graphique :



A partir d'un certain rang, tous les points de la suite sont à l'intérieur de la « bande » délimitée par a et b.

Exemples :

- $u_n = \dfrac{1}{n^2}$

  $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$

  La suite converge vers 0.

- $u_n = 1 + (0,1)^n$

  $u_n - 1 = (0,1)^n = \left(\dfrac{1}{10}\right)^n = \dfrac{1}{10^n} = 10^{-n}$

  La suite de terme $u_n - 1$ converge vers 0 donc la suite de terme u_n converge vers 1.

2. Suites de référence de limite nulle

Les suites de terme général $\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{1}{n^2}$, $\dfrac{1}{n^3}$, ... , $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, q^n avec $0 < q < 1$ sont des suites qui convergent vers 0.

Exemples :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{7}\right)^n = 0$ car $0 < \dfrac{1}{7} < 1$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^8} = 0$

3. Suites de limite infinie

Certaines suites ont une limite infinie.

Soit la suite de terme général u_n. S'il existe un rang N à partir duquel u_n est supérieur à n'importe quel nombre positif, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Exemples :

- Soit la suite de terme général $u_n = 4^n$. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

- Soit la suite de terme général $u_n = n^3$.

  $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Les suites de terme général n, n^2, n^3, $\sqrt{n}$, q^n avec $q > 1$ tendent vers $+\infty$.

4. Suites divergentes

Une suite est divergente si elle n'est pas convergente.

Donc une suite est divergente si :
- Elle a une limite infinie : $-\infty$ ou $+\infty$
- Elle n'a pas de limite.

Exemples :

- $u_n = n^3 - 6$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc la suite est divergente.
- $u_n = (-1)^n$: on a $u_0 = 1$, $u_1 = -1$, $u_2 = -1$, $u_3 = -1$… donc la suite est divergente.

II. Calcul de limites de suites

1. Cas où la suite est donnée sous la forme $u_n = g(n)$

Soit une suite de terme général $u_n = g(n)$. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

Exemple :

Soit la suite de terme général $u_n = \dfrac{3n+1}{n+4}$.

On pose $g(x) = \dfrac{3x+1}{x+4}$.

Calculons la limite de $g(x)$ quand $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x+1}{x+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3x+1}{x}}{\frac{x+4}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{1+\frac{4}{x}}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x} = 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \dfrac{3}{1} = 3$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$. La suite converge vers 3.

2. Théorèmes des gendarmes

➢ Théorème des gendarmes pour une limite finie :

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que à partir d'un certain rang, on ait :

$$u_n \leq v_n \leq w_n$$

Si (u_n) et (w_n) convergent vers l ($l \in \mathbb{R}$), alors (v_n) converge aussi vers l.

Démonstration :

Soit une suite (v_n).
On suppose qu'il existe deux suites (u_n) et (w_n) telles que :
– à partir d'un certain rang, on ait $u_n \leq v_n \leq w_n$
– (u_n) et (w_n) convergent vers l.

Puisque (u_n) converge vers l, tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de (u_n) à partir d'un certain rang. De même (w_n) converge vers l, donc tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de (w_n) à partir d'un certain rang.

Comme à partir d'un certain rang, on a $u_n \leq v_n \leq w_n$, v_n, on peut en déduire que tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de (v_n) à partir de d'un certain rang. Donc (v_n) converge aussi vers l.

➢ Théorème des gendarmes pour une limite infinie :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.
- Si, à partir d'un certain rang, on a : $u_n \geq v_n$ et (v_n) tend vers $+\infty$, alors la suite (u_n) tend également vers $+\infty$.
- Si, à partir d'un certain rang, on a : $u_n \leq v_n$ et (v_n) tend vers $-\infty$, alors la suite (u_n) tend également vers $-\infty$.

3. Opérations sur les limites de suites

Les théorèmes sont les mêmes que pour les opérations sur les limites de fonctions :

- **Limite d'une somme de suites**

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$ alors :

$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = l + l'$

- **Limite du produit par un nombre**

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} k \times u_n = k \times l$ $(k \in \mathbb{R})$

- **Limite d'un produit de suites**

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$ alors :

$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = l \times l'$

- **Limite d'un quotient de suites**

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$ alors :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = \dfrac{l}{l'}$

4. Cas particulier des limites de suites géométriques

Soit une suite géométrique de terme général $u_n = q^n$.

Conditions sur *q*	**Limite**	**Exemple**
$q \leq -1$	q^n n'a pas de limite	$(-1{,}1)^n$ n'a pas de limite
$-1 < q < 1$	$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$
$q = 1$	$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$ (u_n est constante)	$\lim\limits_{n\to+\infty} 1^n = 1$
$q > 1$	$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (1{,}0001)^n = +\infty$

6. Cas particulier des limites de suites arithmétiques

Soit une suite arithmétique de terme général $u_n = u_0 + nr$.

- Si $r > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Si $r < 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exemple :

Soit la suite de terme général $u_n = u_0 - 0{,}001 \times n$ avec $u_0 = -12$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.