CORRECTION

Exercice 1

1. Soit f la fonction définie sur [5; 20] par $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1000}{x}$.

a) Calculer sa dérivée et vérifier que $f'(x) = \dfrac{(x-10)(x^2+10x+100)}{x^2}$.

$$f'(x) = x - \frac{1000}{x^2} = \frac{x^3 - 1000}{x^2} = \frac{(x-10)(x^2+10x+100)}{x^2}.$$

b) Construire le tableau des variations de f sur [5; 20]. Quel est le minimum de f sur [5; 20] ?

$x^2 + 10x + 100$ est un trinome du second degré dont le discriminant Δ est égal à – 300.

$x^2 + 10x + 100$ est donc toujours positif. Comme x^2 est aussi toujours positif, $f'(x)$ a le même signe que x – 10. D'où le tableau de variations :

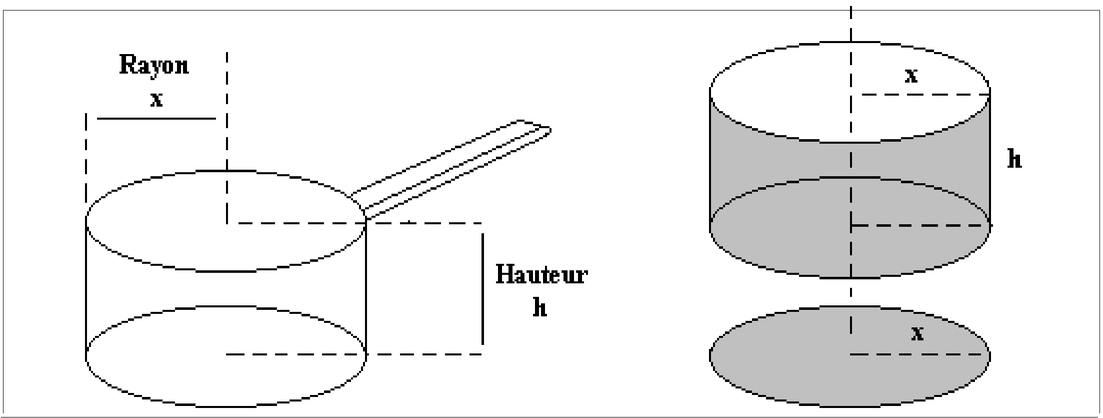
x	5		10		20
$f'(x)$		–	0	+	
$f(x)$	212,5	$\searrow$	150	$\nearrow$	250

On a calculé $f(5) = \dfrac{25}{2} + \dfrac{1000}{5}$ = 212,5; $f(10) = \dfrac{100}{2} + \dfrac{1000}{10}$ = 150;

$f(20) = \dfrac{400}{2} + \dfrac{1000}{20}$ = 250.

Le minimum de f sur [5; 20] est donc 150, il est atteint pour x = 10.

2. Une casserole est constituée d'un fond de rayon x et d'un cylindre de hauteur h (il n'y a pas de couvercle et le manche n'est représenté ici que pour le décor).



a) Exprimer la surface F du fond en fonction de x, puis la surface latérale L du cylindre et le volume V de la casserole, en fonction de x et h.

F = πx^2; L = $2\pi x h$; V = $\pi x^2 h$.

b) On souhaite construire une casserole de volume imposé $1000\pi \text{ cm}^3$. Calculer h en fonction de x et exprimer la surface totale de tôle S(x) nécessaire.

Si V = 1000π, on a 1000π = $\pi x^2 h$, donc h = $\frac{1000}{x^2}$.

On en déduit que L = $2\pi xh$ = $2\pi x \times \frac{1000}{x^2}$ = $\frac{2000\pi}{x}$

. La surface totale de tôle nécessaire

est S(x) = F + L = πx^2 + $\frac{2000\pi}{x}$.

3. a) Montrer que S(x) = $2\pi f(x)$ où f est la fonction étudiée dans la question 1. En déduire les variations, sur l'intervalle [5 ; 20], de la fonction S.

$2\pi f(x)$ = $2\pi\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1000}{x}\right)$ = πx^2 + $\frac{2000\pi}{x}$ = S(x).

Comme S(x) = $2\pi f(x)$, S'(x) = $2\pi f'(x)$ et S a les mêmes variations que f.

Sur [5; 10], S est décroissante de 450π à 300π;

sur [10; 20], S est croissante de 300π à 500 π.

b) Quelles sont les dimensions d'une casserole de 1000π cm^3 qui utilise le moins de tôle possible ? Quelle est alors la surface utilisée ?

D'après ce qui précède, une casserole de 1000π cm^3 qui utilise le moins de tôle possible a un rayon de 10 cm. Sa hauteur est $\frac{1000}{10^2}$ = 10 cm. La surface de tôle utilisée est 300π cm².

Rappels :

L'aire d'un disque de rayon r est πr^2 ; le périmètre d'un cercle de rayon r est $2\pi r$;

On obtient le volume d'un cylindre en multipliant l'aire de la base par la hauteur.

Vérifier que A est le milieu de [BC].

T coupe l'axe des abscisses en B avec y_B = 0, d'où $\frac{-9}{4}x_B+3=0$ et x_B = $\frac{4}{3}$.

Exercice 2

Soit H l'hyperbole d'équation $y=\frac{1}{x}$.

1. Déterminer les coordonnées du point A de H d'abscisse $\frac{2}{3}$, puis une équation de la tangente T à H en ce point.

Les coordonnées de A sont $x_A = \frac{2}{3}$ et $y_A = \frac{1}{x_A} = \frac{3}{2}$.

H est la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$.

On a donc $f'(x)=\frac{-1}{x^2}$. L'équation de la tangente à H en A est :

$y = f'\left(\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)$. Comme $f'\left(\frac{2}{3}\right)=-1\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{-9}{4}$ et comme $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{2}$, cette équation est finalement $y=\frac{-9}{4}\left(x-\frac{2}{3}\right)+\frac{3}{2}$, soit $y=\frac{-9}{4}x+3$.

2. Déterminer les coordonnées des points B et C intersections de T avec les axes de coordonnées.

T coupe l'axe des ordonnées en C avec $x_C = 0$, d'où $y_C = 3$.
Les coordonnées du milieu de [BC] sont :
$\frac{x_B+x_C}{2} = \frac{2}{3}$ et $\frac{y_B+y_C}{2} = \frac{3}{2}$. Il s'agit des coordonnées de A, donc A est bien le milieu de [BC].

3. Généralisation : reprendre les questions précédentes avec le point A d'abscisse a.

L'équation de la tangente en a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, soit
$y=\frac{-1}{a^2}(x-a)+\frac{1}{a}$, soit encore $y=\frac{-1}{a^2}x+\frac{2}{a}$.

Cette tangente coupe l'axe des abscisses en B avec $y_B = 0$, et donc $\frac{-1}{a^2}x_B+\frac{2}{a}=0$, d'où $x_B = 2a$. Elle coupe l'axe des ordonnées en C avec $x_C = 0$, et donc $y_C = \frac{2}{a}$.

Les coordonnées du milieu de [BC] sont $\left(a , \frac{1}{a}\right)$, c'est à dire les coordonnées du point de tangence.

Question bonus : en déduire une méthode géométrique de la construction des tangentes à H.

Pour tracer la tangente en un point A de H, on peut, par exemple :
- construire D symétrique de O par rapport à A.
- construire ensuite B et C projections de D sur les axes.
- comme OBDC est un parallélogramme de centre A, A est le milieu de [BC], donc, d'après ce qui précède, la droite (BC) est la tangente à H en A.