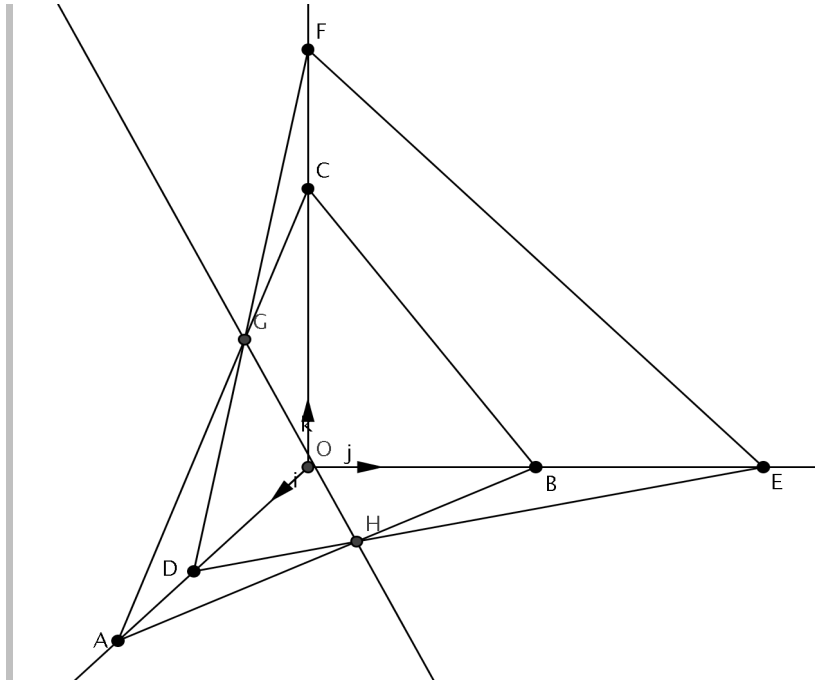


Correction exercice 1

Exercice 1

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Placer les points $A(5, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, 4)$, $D(3, 0, 0)$, $E(0, 6, 0)$ et $F(0, 0, 6)$



2. Trouver graphiquement l'intersection des plans (ABC) et (DEF) .

Les droites (AC) et (DF) qui sont dans le plan $(O; \vec{i}, \vec{k})$ se coupent en G .

Les droites (AB) et (DE) qui sont dans le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ se coupent en H .

Les points G et H sont donc à la fois dans le plan (ABC) et dans le plan (DEF) .

L'intersection de ces deux plans est donc la droite (GH) .

3. d est la droite commune aux deux plans. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la droite d avec les plans $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et $(O; \vec{i}, \vec{k})$.

Le point G , intersection de d et de $(O; \vec{i}, \vec{k})$, est aussi l'intersection de (AC) et (DF) .

Il existe donc un réel k tel que $\vec{AG} = k \vec{AC}$ et un réel k' tel que $\vec{DG} = k' \vec{DF}$.

$$\text{On en déduit que } \begin{cases} x_G - x_A = k(x_C - x_A) \\ y_G - y_A = k(y_C - y_A) \\ z_G - z_A = k(z_C - z_A) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_G - x_D = k'(x_F - x_D) \\ y_G - y_D = k'(y_F - y_D) \\ z_G - z_D = k'(z_F - z_D) \end{cases}$$

$$\text{ce qui donne } \begin{cases} x_G - 5 = -5k \\ y_G = 0 \\ z_G = 4k \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_G - 3 = -3k' \\ y_G = 0 \\ z_G = 6k' \end{cases}.$$

$$k \text{ et } k' \text{ sont donc solutions du système } \begin{cases} 5 - 5k = 3 - 3k' \\ 4k = 6k' \end{cases}.$$

$$\text{On en déduit que } k = \frac{2}{3} \text{ et } k' = \frac{4}{9}, \text{ d'où } x_G = \frac{5}{3} \text{ et } z_G = \frac{8}{3}.$$

Les coordonnées de G sont donc $\left(\frac{5}{3}, 0, \frac{8}{3}\right)$.

De la même façon, on calcule les coordonnées de H.

Le point H, intersection de d et de $(O; \vec{i}, \vec{j})$, est aussi l'intersection de (AB) et (DE).

Il existe donc un réel k tel que $\overrightarrow{AH} = k \overrightarrow{AB}$ et un réel k' tel que $\overrightarrow{DH} = k' \overrightarrow{DE}$.

On en déduit que
$$\begin{cases} x_H - x_A = k(x_B - x_A) \\ y_H - y_A = k(y_B - y_A) \\ z_H - z_A = k(z_B - z_A) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_H - x_D = k'(x_E - x_D) \\ y_H - y_D = k'(y_E - y_D) \\ z_H - z_D = k'(z_E - z_D) \end{cases}$$

ce qui donne
$$\begin{cases} x_H - 5 = -5k \\ y_H = 3k \\ z_H = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_H - 3 = -3k' \\ y_H = 6k' \\ z_H = 0 \end{cases}.$$

k et k' sont donc solutions du système
$$\begin{cases} 5 - 5k = 3 - 3k' \\ 3k = 6k' \end{cases}.$$

On en déduit que $k = \frac{4}{7}$ et $k' = \frac{2}{7}$, d'où $x_H = \frac{15}{7}$ et $y_H = \frac{12}{7}$.

Les coordonnées de H sont donc $\left(\frac{15}{7}, \frac{12}{7}, 0\right)$.

4. Pourquoi les droites d , (CB) et (EF) sont-elles concourantes ?

Calculer les coordonnées de leur point d'intersection.

Comme $x_G \neq x_H$, la droite (GH) n'est pas parallèle au plan $(O; \vec{j}, \vec{k})$, elle le coupe donc en un point M. Ce point étant sur (GH) est dans le plan (ABC), il est donc sur l'intersection de (ABC) avec $(O; \vec{j}, \vec{k})$, c'est à dire (BC). De même, M étant sur (GH) est dans le plan (DEF), il est donc sur l'intersection de (DEF) avec $(O; \vec{j}, \vec{k})$, c'est à dire (EF). Ainsi le point M se trouve sur les 3 droites (GH), (BC) et (EF).

Le point M est l'intersection de (BC) et (EF).

Il existe donc un réel k tel que $\overrightarrow{BM} = k \overrightarrow{BC}$ et un réel k' tel que $\overrightarrow{EM} = k' \overrightarrow{EF}$.

On en déduit que
$$\begin{cases} x_M - x_B = k(x_C - x_B) \\ y_M - y_B = k(y_C - y_B) \\ z_M - z_B = k(z_C - z_B) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_M - x_E = k'(x_F - x_E) \\ y_M - y_E = k'(y_F - y_E) \\ z_M - z_E = k'(z_F - z_E) \end{cases}$$

ce qui donne
$$\begin{cases} x_M = 0 \\ y_M - 3 = -3k \\ z_M = 4k \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_M = 0 \\ y_M - 6 = -6k' \\ z_M = 6k' \end{cases}.$$

k et k' sont donc solutions du système
$$\begin{cases} 3 - 3k = 6 - 6k' \\ 4k = 6k' \end{cases}.$$

On en déduit que $k = 3$ et $k' = 2$, d'où $y_M = -6$ et $z_M = 12$.

Les coordonnées de M sont donc $(0, -6, 12)$.

Exercice 2

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. c est un nombre réel.

On considère les points $A(3, 1, -3)$, $B(-1, 5, -3)$ et $C(-1, 1, c)$.

Démontrer que, quel que soit le réel c , le triangle ABC est isocèle.

Peut-il être équilatéral ?

On a $AC^2 = 4^2 + (c + 3)^2 = c^2 + 6c + 25$ et $BC^2 = (-4)^2 + (c + 3)^2 = c^2 + 6c + 25$.

Comme $AC^2 = BC^2$ et comme AC et BC sont positifs, $AC = BC$. Le triangle ABC est donc isocèle en C.

Pour que ABC soit équilatéral il faut et il suffit que $AC^2 = AB^2$.

Or $AB^2 = (-4)^2 + 4^2 = 32$. On doit donc avoir $c^2 + 6c + 25 = 32$, soit $c^2 + 6c - 7 = 0$.

Il s'agit d'une équation du second degré dont le discriminant est $\Delta = 36 + 28 = 64$. Elle a deux solutions qui sont $c_1 = \frac{-6 + 8}{2} = 1$ et $c_2 = \frac{-6 - 8}{2} = -7$.

Le triangle ABC est équilatéral lorsque c est égal à 1 ou à -7 .