Corrigé

Exercice 1 :

a est un nombre réel. On considère la suite (u_n) des nombres réels définie pour tout entier naturel $n > 0$ par la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}u_n$, et par la condition initiale $u_1 = a$.

(v_n) est la suite de nombres réels définie pour tout entier naturel $n > 0$ par : $v_n = 13u_n - 4$.

1. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison k.

Soit n un entier naturel non nul.

$v_{n+1} = 13u_{n+1} - 4 =$

$$13\left(\frac{4}{10} - \frac{3}{10}u_n\right) - 4 = \frac{52}{10} - \frac{39}{10}u_n - \frac{40}{10} = \frac{12}{10} - \frac{39}{10}u_n = \frac{3}{10}(4 - 13u_n) = -\frac{3}{10}v_n.$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $k = -\frac{3}{10}$.

2. Exprimer v_n en fonction de n et de a.

Soit n un entier naturel non nul.

$v_n = v_1\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}$. Or $v_1 = v_n = 13u_1 - 4 = 13a - 4$.

Donc, $v_n = (13a - 4)\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}$

3. Prouver que, pour tout entier naturel $n > 0$: $u_n = \frac{4}{13} + \left(a - \frac{4}{13}\right)\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}$.

Soit n un entier naturel non nul.

$v_n = 13u_n - 4 \Leftrightarrow u_n = \frac{v_n + 4}{13}$, en remplaçant v_n par le résultat de la question 2.,

$$u_n = \frac{(13a-4)\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1} + 4}{13} = \frac{13a-4}{13}\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1} + \frac{4}{13} = \frac{4}{13} + \left(a - \frac{4}{13}\right)\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}$$

Donc pour tout entier naturel $n > 0$: $u_n = \frac{4}{13} + \left(a - \frac{4}{13}\right)\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}$.

4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

$-1 < -\frac{3}{10} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1} = 0$. Comme $a - \frac{4}{13}$ est un réel,

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(a - \frac{4}{13}\right)\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1} = 0$

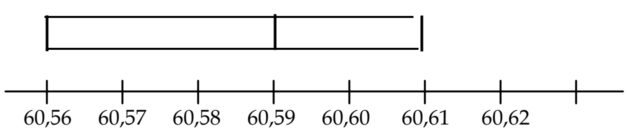
par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{13} + \left(a - \frac{4}{13}\right)\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1} = \frac{4}{13}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{4}{13}$.

Exercice 2 :

1. Calculer le premier décile d_1 et le neuvième décile d_9.

On détermine d_1 et d_9 par lecture. $\boxed{d_1 = 60{,}56 \quad d_9 = 60{,}61.}$

2. Construire la représentation en boite à moustache de cette série statistique.



Exercice 3 :

1. $4^2 + 1^2 - 2\times4 - 6\times1 - 3 = 16 + 1 - 8 - 6 - 3 = 17 - 17 = 0$ donc A appartient au cercle C .

2. Déterminer le centre et le rayon de C .

$x^2 + y^2 - 2x - 6y - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y-3)^2 - 9 - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 = 13$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 = \sqrt{13}^2$ Le cercle C a pour centre le point I(1 ; 3) et de rayon $\sqrt{13}$.

3. En déduire une équation de la tangente à C en A.

Soit M un point du plan de coordonnées $(x\,;y)$.

« M appartient à la tangente C en A » équivaut à « $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{AM}=0$ ».

$\overrightarrow{IA}(3;-2)$ et $\overrightarrow{AM}(x-4;y-1)$.

Le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est orthonormal donc

$\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{AM}=0 \Leftrightarrow 3(x-4)-2(y-1)=0 \Leftrightarrow 3x-12-2y+2=0 \Leftrightarrow 3x-2y-10=0$.

Une équation de la tangente à C en A est $3x-2y-10=0$.

Exercice 4

1. $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ} = AI\times AJ\times\cos I\hat{A}J = AI\times AJ\times\cos\theta$.

Or en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle ABI rectangle en B, on obtient $AI=\frac{\sqrt{5}}{2}a$. De même dans le triangle ADJ rectangle en D, $AJ=\frac{\sqrt{5}}{2}a$.

Donc $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}=\frac{5}{4}a^2\cos\theta$

2. a. Exprimer $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

b. Donner une autre expression de $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}$

$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}=\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right).\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a^2=a^2$$

3. a. La valeur exacte de θ

D'après les questions précédentes, $a^2=\frac{5}{4}a^2\cos\theta \Leftrightarrow \frac{5}{4}\cos\theta=1 \Leftrightarrow \cos\theta=\frac{4}{5}$

b. La valeur approchée, en degrés, à 10^{-2} près par défaut de θ.

En utilisant la calculatrice, on a : $\theta\approx 36{,}86°$

Exercice 5

[MN] est un diamètre et A et B deux points de C donc les triangles MAN et MBN sont respectivement rectangles en A et B.

$\overline{MA}\times\overline{MI}=\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MI}$ car A est le projeté orthogonal de N sur (MI)

$\overline{NB}\times\overline{NI}=\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{NI}$ car B est le projeté orthogonal de N sur (NI)

On a donc $\overline{MA}\times\overline{MI}+\overline{NB}\times\overline{NI}=\overrightarrow{MN}\cdot(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{NI})=\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MN}=MN^2$