Polynésie session 2013

Exercice 1 8 points

Dans cet exercice les résultats sont à arrondir à 10^{-3}.

Les trois parties sont indépendantes.

Un fabricant produit des tondeuses dans deux usines. Le coût de fabrication est de 160 € par machine.

L'usine A produit 400 unités par mois et l'usine B en produit 600.

Le fabricant a fait réaliser un test de conformité, dans les mêmes conditions, dans les deux usines sur une très grande quantité de tondeuses fabriquées.

Une tondeuse est déclarée conforme si le test est positif.

Dans l'usine A, le test est positif dans 90% des cas.

Dans l'usine B, le test est positif dans 95% des cas.

Une tondeuse conforme est vendue 250 €, sinon, elle est bradée à un sous-traitant pour 100 €.

Partie A : Probabilités conditionnelles

On prélève, au hasard, une tondeuse produite par ce fabricant.

On note A, l'évènement : « La tondeuse est produite dans l'usine A ». On note C, l'évènement : « La tondeuse est conforme ».

1. À l'aide de l'énoncé, donner les probabilités suivantes : $P(\overline{A})$, $P_A(C)$, $P_{\overline{A}}(C)$ et $P_A(\overline{C})$.

2. Calculer $P(A \cap C)$ puis $P(\overline{A} \cap C)$.

3. En déduire la probabilité que la tondeuse soit conforme.

Partie B : Loi binomiale

On admet que chaque tondeuse qui sort des usines a une probabilité de 7% d'être non conforme.

On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de tondeuses conformes dans un lot de 250 tondeuses prises au hasard dans le stock. On admet que le nombre de tondeuses fabriquées est suffisamment grand pour assimiler ce tirage à un tirage avec remise.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. Calculer la probabilité de l'évènement E : « exactement 240 tondeuses sont conformes ».

Interpréter ce résultat.

3. Calculer l'espérance mathématique de X.

4. On note Y la variable aléatoire qui donne le bénéfice réalisé sur un lot de 250 tondeuses.

a. Montrer que $Y = 150\,X - 15\,000$.

b. Calculer l'espérance mathématique de Y. Interpréter le résultat obtenu.

Partie C : Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire X par la loi normale de moyenne $m = 232{,}5$ et d'écart type $\sigma = 4$. On note Z la variable aléatoire suivant cette loi normale.

1. Justifier le choix des valeurs de m et de σ.

2. On veut calculer la probabilité que le nombre de tondeuses conformes de ce lot de 250 soit au moins égal à 240. Pour cela, donner une valeur numérique de $P(Z > 239{,}5)$.

3. Donner une valeur approchée de la probabilité de l'évènement : « le nombre de tondeuses conformes est compris entre 225 et 245 », c'est-à-dire la probabilité de l'évènement : « $224{,}5 \leq Z \leq 245{,}5$ ».

Exercice 2 12 points

Partie A : Droite de régression

Une marque a lancé sur le marché un nouveau produit destiné aux entreprises. Elle a relevé à six dates précises le taux d'équipement des entreprises concernées pour ce nouveau produit.

On a présenté dans le tableau suivant ce taux noté y en fonction du rang t du nombre de mois écoulés depuis le lancement. Ce taux est écrit sous la forme d'un nombre décimal compris entre 0 et 1, et non pas en pourcentage.

t	1	4	6	8	10	12
y	0,03	0,09	0,18	0,33	0,50	0,70

1. Représenter le nuage des six points dans le repère de l'annexe à rendre avec la copie.

2. À l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite de régression de y en t ainsi que le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique. Arrondir à 0,001.

3. Tracer la droite obtenue sur le graphique précédent.

4. Si la tendance se poursuit, quel sera, à 1 % près, le taux d'équipement des entreprises concernées pour ce nouveau produit 15 mois après le lancement.

5. Expliquer pourquoi cette droite de régression ne pourra pas servir de modèle très longtemps.

Partie B : Étude d'une fonction et calcul intégral

On considère la fonction f définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par $f(t) = \dfrac{1}{1 + 50\,\mathrm{e}^{-0{,}4\,t}}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans le repère défini dans la partie A.

1. On rappelle que $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$. Donner la limite en $+\infty$ de la fonction f et interpréter graphiquement le résultat.

2. Justifier que $f'(t)=\dfrac{20\,\mathrm{e}^{-0,4\,t}}{(1+50\,\mathrm{e}^{-0,4\,t})^2}$ où $f\,'$ est la fonction dérivée de la fonction f et en déduire le sens de variation de f sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

3. Tracer la courbe C sur le graphique de la partie A.

4. *a.* Montrer que $f\,(t)$ peut s'écrire sous la forme $f\,(t)=\dfrac{\mathrm{e}^{0,4\,t}}{\mathrm{e}^{0,4\,t}+50}$.

b. En déduire que la fonction F définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par $F(t)=\dfrac{1}{0,4}\ln(\mathrm{e}^{0,4\,t}+50)$ est une primitive de f sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

5. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\displaystyle\int_{12}^{24} f\,(t)\,\mathrm{d}t$. En déduire la valeur moyenne de f sur [12 ; 24] arrondie à 10^{-2}.

Partie C : Application économique

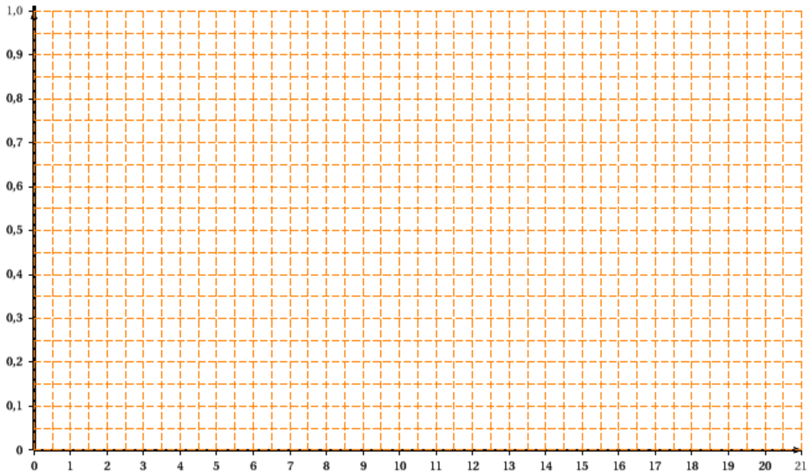
Le modèle donné par la droite de régression ayant ses limites, on considère que la fonction f définie dans la partie B est un meilleur modèle d'approximation du taux d'équipement des entreprises concernées pour ce nouveau produit. La variable t est le temps écoulé, exprimé en mois, depuis le lancement du produit.

1. Déterminer une estimation à 0,1% près du taux d'équipement des entreprises concernées pour ce nouveau produit au bout de deux ans.

2. Déterminer graphiquement, au bout de combien de mois le taux d'équipement dépassera 95%.

3. Donner une interprétation de la valeur moyenne de f sur [12 ; 24].

ANNEXE

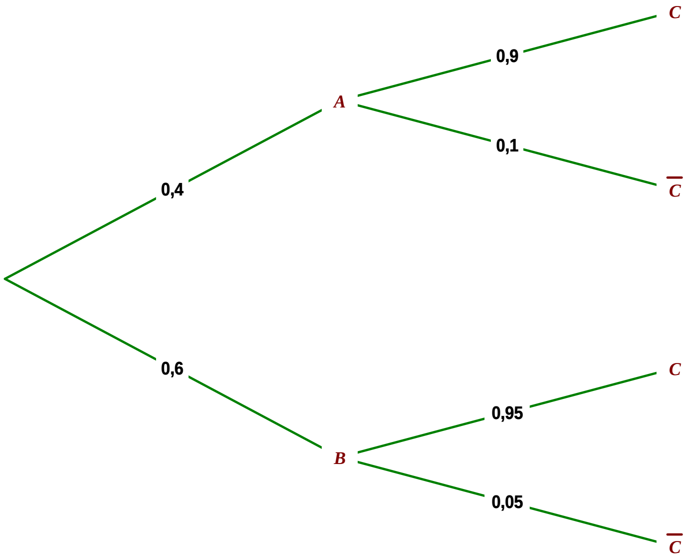


CORRECTION

Exercice 1 8 points
Partie A : Probabilités conditionnelles

1. L'usine A produit 400 unités par mois et l'usine B en produit 600 donc $P(A) = \dfrac{400}{400+600} = 0,4$ et $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,6$

Dans l'usine A, le test est positif dans 90% des cas donc $P_A(C) = 0,9$, Dans l'usine B, le test est positif dans 95% des cas donc $P_{\overline{A}}(C) = 0,95$ et $P_A(\overline{C}) = 1 - P_A(C) = 0,1$.



2. $P(A \cap C) = P_A(C) \times P(A) = 0,4 \times 0,9 = 0,36$
$P(\overline{A} \cap C) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(C) = 0,6 \times 0,95 = 0,57$

3. $P(C) = P(A \cap C) + P(\overline{A} \cap C) = 0,36 + 0,57 = 0,93$

Partie B : Loi binomiale

1. On a une succession de 250 expériences aléatoires, identiques et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :
réussite : la tondeuse est conforme ($p = 0,93$)
échec : la tondeuse n'est pas conforme ($q = 1 - p = 0,07$)
donc la variable aléatoire X qui compte le nombre de tondeuses conformes suit une loi binomiale de paramètres (250 ; 0,93).

2. P(E) = P(X = 240) = 0,017.
Sur un lot de 250 tondeuses, la probabilité d'avoir 240 tondeuses conformes est de 1,7 %

3. L'espérance mathématique de X est $250 \times 0,93 = 232,5$

4. *a.* Le coût de fabrication est de 160 € par machine donc $160 \times 250 = 40\ 000$
Une tondeuse conforme est vendue 250 €, sinon, elle est bradée à un sous-traitant pour 100 €, donc sur un lot de 250 tondeuses, le prix de vente est $250\,X + 100\,(250 - X) = 150\,X + 25\ 000$
Le bénéfice réalisé sur un lot de 250 tondeuses est donc $150\,X + 25\ 000 - 40\ 000$ donc $Y = 150\,X - 15\ 000$.

b. $E(Y) = 150\,E(X) - 15\ 000$ donc $E(Y) = 150 \times 232,5 - 15\ 000 = 19\ 875$
En vendant un grand nombre de lots de 250 tondeuses, le bénéfice moyen est de 19 875 € par lot de 250 tondeuses.

Partie C : Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

1. la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres (250 ; 0,93) d'espérance 232,5 et d'écart-type $\sigma = \sqrt{250 \times 0,93 \times 0,07} = \sqrt{16,275}$ soit $\sigma \approx 4,034$
On approche la loi de la variable aléatoire X par une loi normale de même espérance $m = 232,5$ et d'écart type $\sigma = 4$.

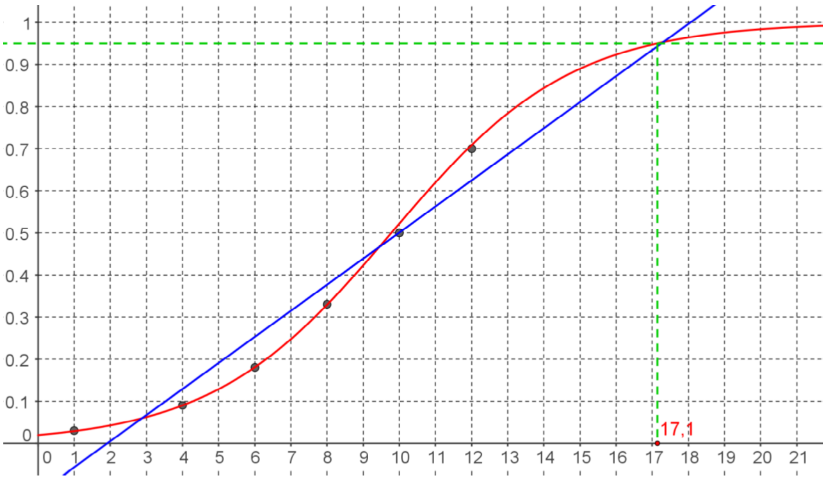
2. $P(Z > 239,5) = 0,04$

3. $P(224,5 \leq Z \leq 245,5) = 0,977$

Exercice 2 12 points

Partie A : Droite de régression

1.



2. $y = 0{,}062\, t - 0{,}118$

Le coefficient de corrélation est $r = 0.{,}966$ donc l'ajustement est bon.

4. Si $t = 15$ alors $y = 0{,}062 \times 15 - 0{,}118 = 0{,}812$ donc, le taux d'équipement des entreprises concernées pour ce nouveau produit 15 mois après le lancement est de 81,2 %

5. Cette droite de régression ne pourra pas servir de modèle très longtemps puisqu'après 18 mois le taux d'équipement dépassera 100 %.

Partie B : Étude d'une fonction et calcul intégral

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-0{,}4t} = 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 1$.

A long terme, le taux d'équipement des entreprises concernées pour ce nouveau produit est de 100 %.

2. $v(t) = \mathrm{e}^{-0{,}4\,t}$ donc $v'(t) = -0{,}4\,\mathrm{e}^{-0{,}4\,t}$

La dérivée de $u(t) = 1 + 50\,\mathrm{e}^{-0{,}4\,t}$ est donc $u'(t) = -0{,}14 \times 50\,\mathrm{e}^{-0{,}4\,t}$ soit $-20\,\mathrm{e}^{-0{,}4\,t}$

La dérivée de $\dfrac{1}{u}$ est $-\dfrac{u'}{u^2}$ donc $f'(t) = -\dfrac{-20\,\mathrm{e}^{-0{,}4t}}{(1+50\,\mathrm{e}^{-0{,}4t})^2}$ soit $f'(t) = \dfrac{20\,\mathrm{e}^{-0{,}4t}}{(1+50\,\mathrm{e}^{-0{,}4t})^2}$

La fonction exponentielle est strictement positive sur R donc pour tout t de $[\,0\,;+\infty\,[$,$f'(t) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

4. *a.* $f(t) = \dfrac{1}{1+50\,\mathrm{e}^{-0{,}4t}} = \dfrac{\mathrm{e}^{0{,}4t}}{\mathrm{e}^{0{,}4t}(1+50\,\mathrm{e}^{-0{,}4t})} = \dfrac{\mathrm{e}^{0{,}4t}}{\mathrm{e}^{0{,}4t} + 50\,\mathrm{e}^{0{,}4t} \times \mathrm{e}^{-0{,}4t}}$

$\mathrm{e}^{-0{,}4\,t} \times \mathrm{e}^{0{,}4\,t} = 1$ donc $f(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{0{,}4t}}{\mathrm{e}^{0{,}4t} + 50}$.

b. La dérivée de ln u est $\dfrac{u'}{u}$ donc $F'(t) = \dfrac{1}{0{,}4} \times \dfrac{0{,}4\,\mathrm{e}^{0{,}4t}}{\mathrm{e}^{0{,}4t} + 50} = \dfrac{\mathrm{e}^{0{,}4t}}{\mathrm{e}^{0{,}4t} + 50}$ donc $F'(t) = f(t)$ donc la fonction F définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par $F(t) = \dfrac{1}{0{,}4} \ln(\mathrm{e}^{0{,}4\,t} + 50)$ est une primitive de f sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

5. $\displaystyle\int_{12}^{24} f(t)\,\mathrm{d}t = F(24) - F(12) = \frac{1}{0{,}4}\ln(\mathrm{e}^{0{,}4\times 24} + 50) - \frac{1}{0{,}4}\ln(\mathrm{e}^{0{,}4\times 12} + 50)$ donc $\displaystyle\int_{12}^{24} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{0{,}4}\ln(\mathrm{e}^{9{,}6} + 50) - \frac{1}{0{,}4}\ln(\mathrm{e}^{4{,}8} + 50)$.

$\displaystyle\int_{12}^{24} f(t)\,\mathrm{d}t$ est égale environ à 11,147.

La valeur moyenne de f sur $[12\,;24]$ est égale à $\displaystyle\frac{1}{24-12}\int_{12}^{24} f(t)\,\mathrm{d}t$ soit $\displaystyle\frac{1}{12}\int_{12}^{24} f(t)\,\mathrm{d}t$ soit 0,93 à 10^{-2} près.

Partie C : Application économique

1. Le taux d'équipement des entreprises concernées pour ce nouveau produit au bout de deux ans est $f(24)$ soit 0,997 donc 99,7 %

2. Il faudra attendre 18 mois pour que le taux d'équipement dépasse 95%.

3. Le taux d'équipement moyen entre le douzième et le vingt-quatrième mois est de 93 %.