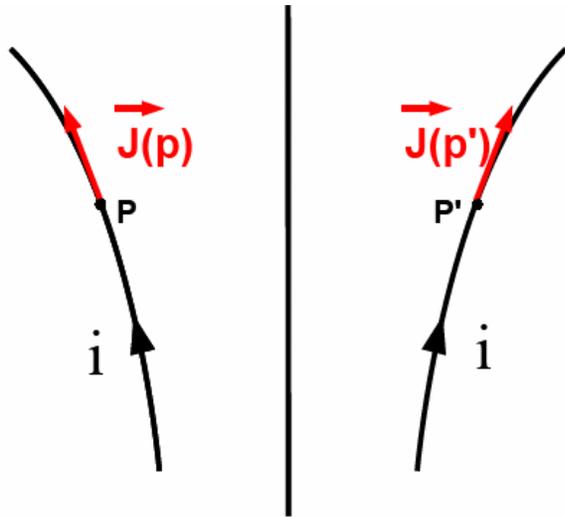
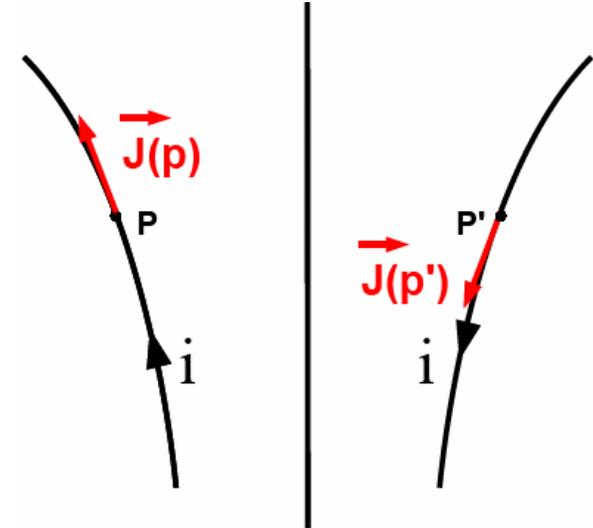


Propriétés de symétrie du champ magnétique

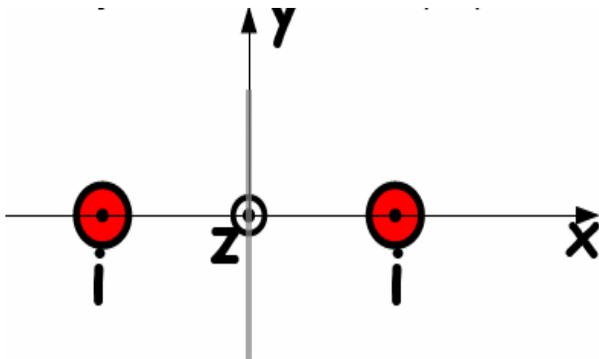
Plan de symétrie



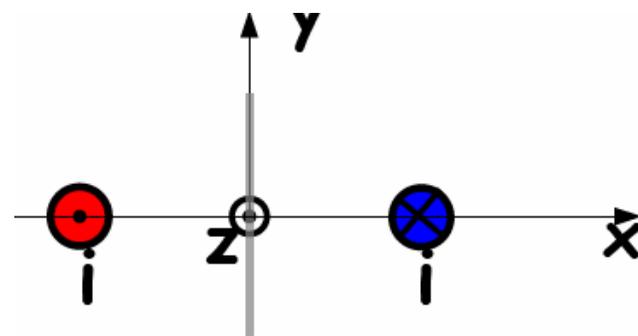
Plan d'antisymétrie



Exemple : deux fils infinis parallèles à l'axe Oz parcourus par un courant i.



$zOy = \text{plan de symétrie}$



$zOy = \text{plan d'antisymétrie}$

Direction et invariances du champ magnétique

Le champ magnétique a les propriétés de symétrie d'un vecteur ***axial*** ou " **pseudo-vecteur** ".

pour trouver la direction du champ magnétique en un point M,



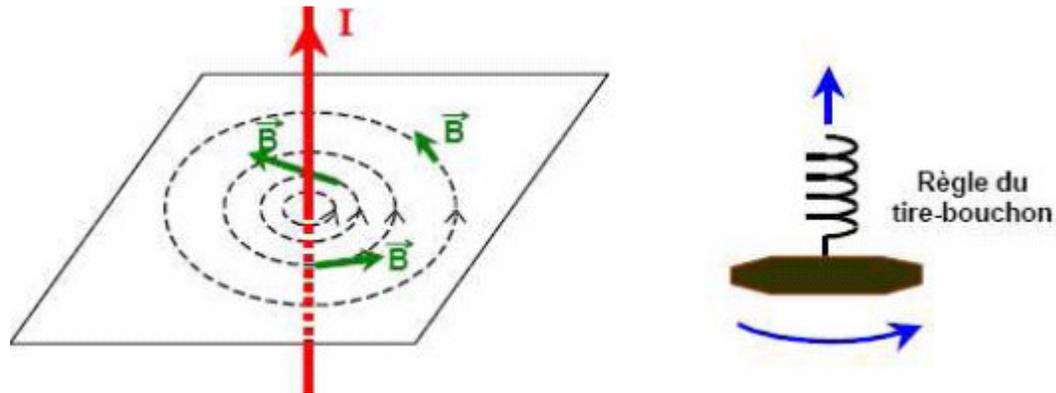
il suffit d'identifier un plan de symétrie de la distribution de courants passant par M. **Le champ $B(M)$ est alors perpendiculaire à ce plan P**



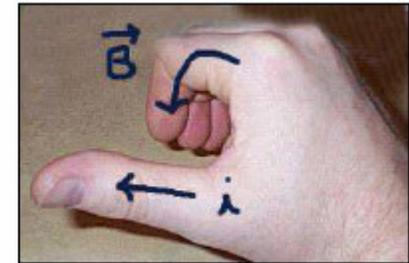
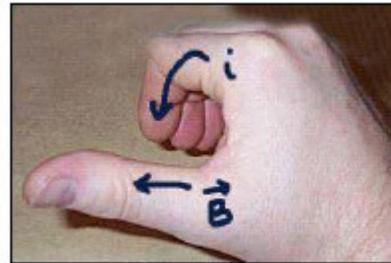
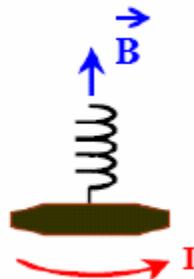
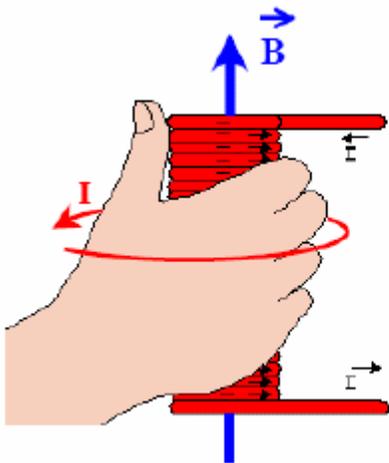
identifier deux plans d'antisymétrie passant par M ,**le champ $B(M)$ est parallèle à la droite matérialisant l'intersection des deux plans.**

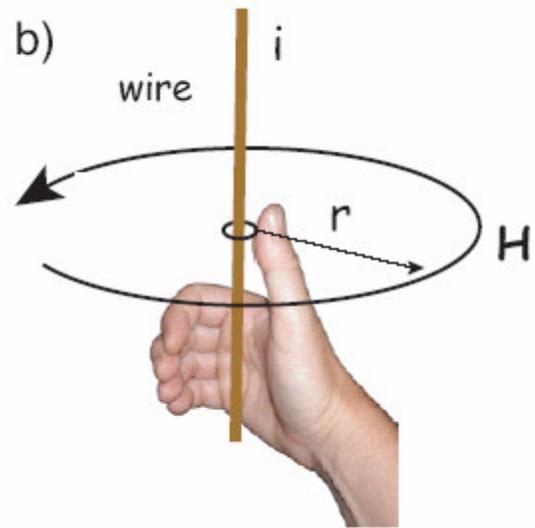
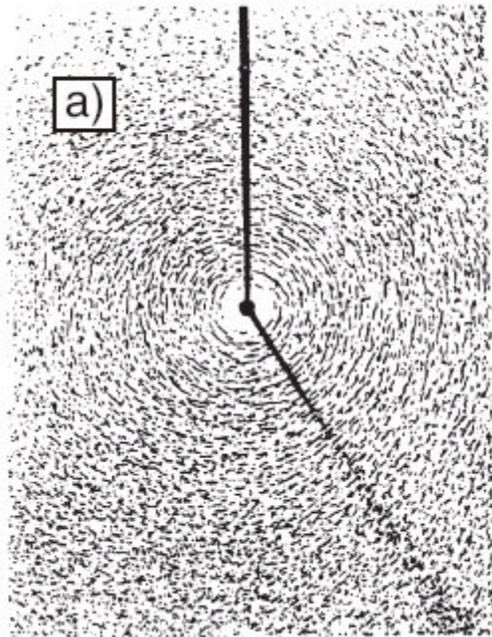
Les **invariances de la distribution** de courants permettent de connaître les variables d'espace dont dépendent les composantes du champ magnétique.

Magnétostatique



Le sens de rotation du tire-bouchon indique le sens des lignes de champ magnétique.





Calcul du champ

Le champ magnétique est caractérisé par :

- direction
- Sens
- module

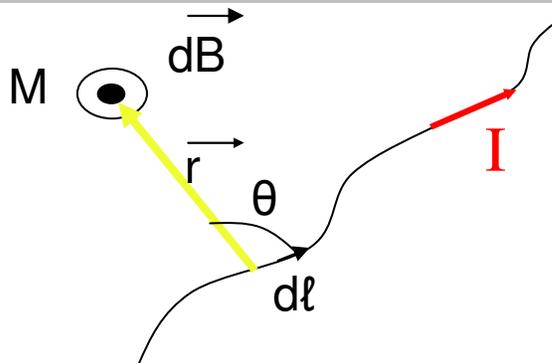
Loi de Biot et Savart :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{l} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Théorème d'Ampère

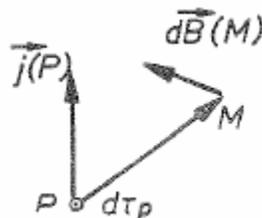
$$\int_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I$$

Donne, le **sens**, la **direction** et l'**intensité**

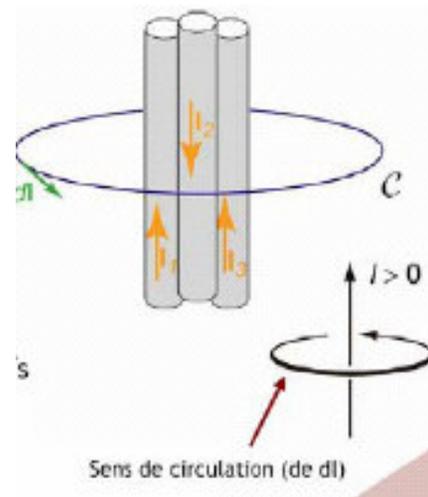


Pour une densité de courant :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(P) \wedge \vec{PM}}{PM^3} \cdot d\tau_P$$



• Nous donne uniquement le **module** de B



Ici

$$I = I_1 - I_2 + I_3$$

b. Forme locale

On a

$$I = \oint \vec{j} \cdot d\vec{S}$$



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \oint \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Par le théorème de la circulation, on a

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \oint \vec{j} \cdot d\vec{S}$$



$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

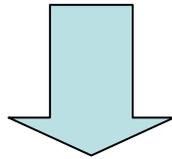
On a $\text{div rot } \mathbf{B} = 0$



$\text{div } \mathbf{j} = 0$ (régime stationnaire)

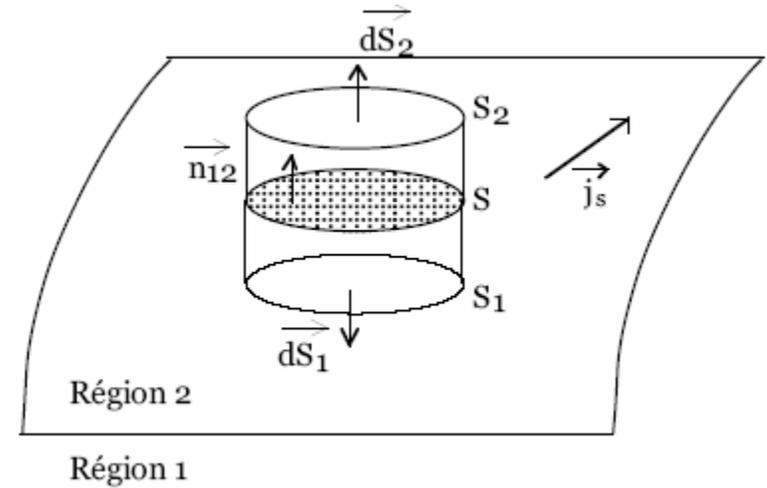
Conditions aux limites en magnétisme à une interface :

$$\oint_{\mathcal{S} \text{ fermée}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$



$$B_{1n} = B_{2n}$$

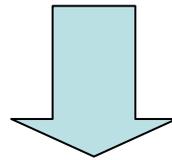
$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{12} = 0$$



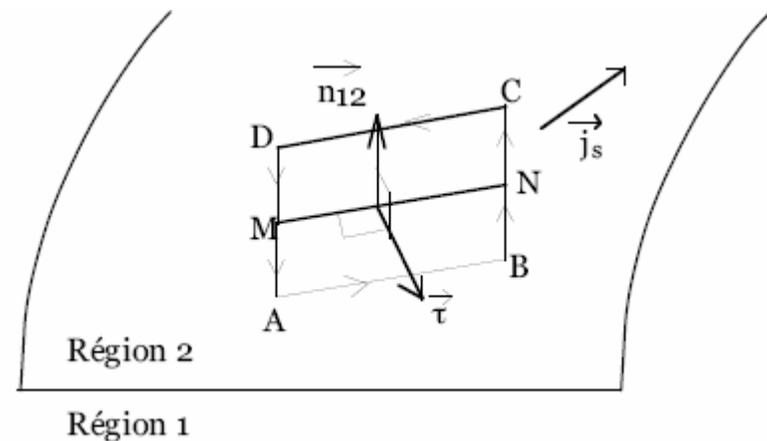
Continuité de la composante normale du champ B

$$\int_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$



$$B_{2t} - B_{1t} = \mu_0 J^s$$



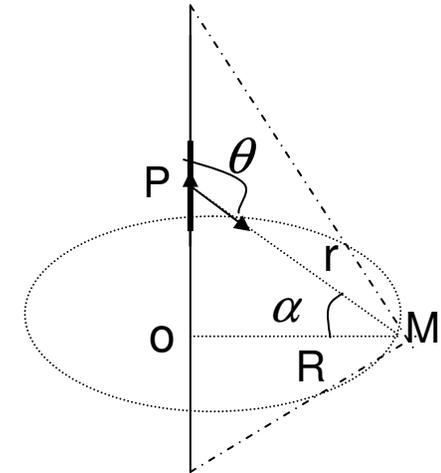
Champ magnétique créé par un long fil

Un élément $I dz$ au point P crée un champ $d\mathbf{B}$ au point M, normal au plan de la figure donné par :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{z} \times \vec{u}}{r^2} \quad (\text{loi de Biot et Savart}) \quad \text{avec} \quad r = \sqrt{z^2 + R^2}$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dz \sin \theta}{r^2}$$

on a $z = OP = R \operatorname{tg} \alpha \quad \Rightarrow \quad dz = R \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$



Tout les $d\mathbf{B}$ sont colinéaires et de même sens

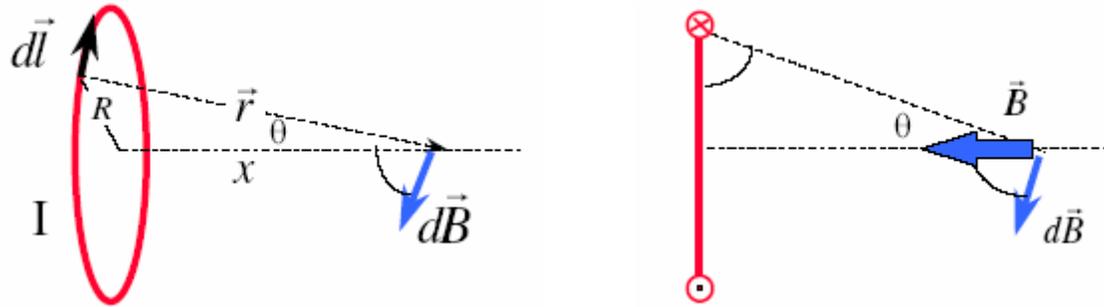
$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha d\alpha \quad \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)$$

Cas d'un fil infini $\alpha_1 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ Et $\alpha_2 \longrightarrow -\frac{\pi}{2}$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

Champ d'une boucle de courant

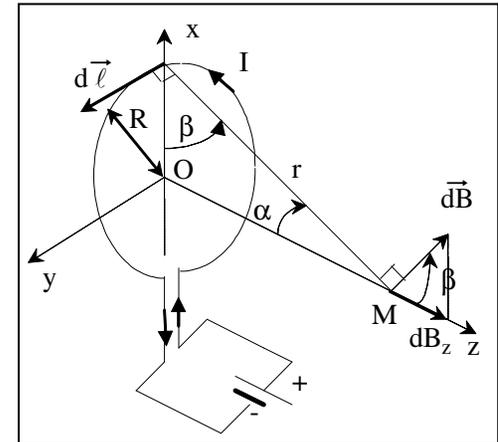


$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{u}}{r^2} \quad (\text{loi de Biot et Savart})$$

Symétrie : B est suivant Ox

$$dB_x = dB \sin \theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta}{r^2}$$

$$B = \oint dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \theta}{r^2} \int dl = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$



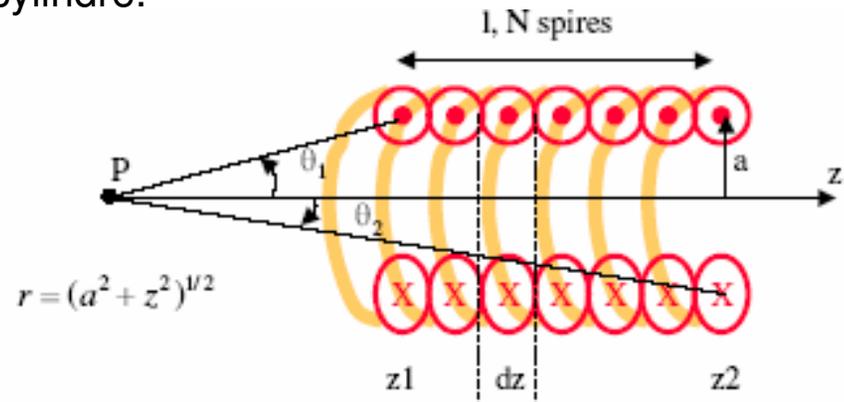
$$B = \frac{\mu_0}{2R} \sin^3 \theta$$

Champ B sur l'axe d'un solénoïde court

Solénoïde = ensemble de spires, de même axe, même rayon, parcourues dans le même sens par un même courant, bobinées sur un cylindre.

Champ sur l'axe z d'une spire de rayon a

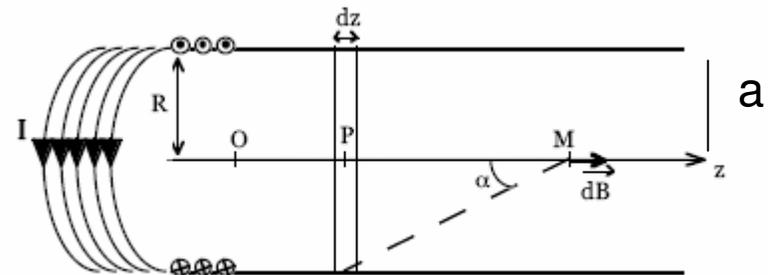
$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{Ia^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$



Soit un solénoïde ayant $n=(l/a)$ spires par unité de longueur :

Soit une tranche d'épaisseur dz. Elle contient ndz spires et crée au point P le champ:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \theta \cdot ndz \vec{k}$$



Avec : $z = a \cot \theta$ $dz = -a \frac{d\theta}{\sin^2 \theta}$

d'où :
$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0 I n}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \vec{k}$$

Cas d'un solénoïde très grand :

$$l \gg a \quad \theta_1 \longrightarrow \pi \quad \text{et} \quad \theta_2 \longrightarrow 0$$



$$B = \mu_0 n I$$

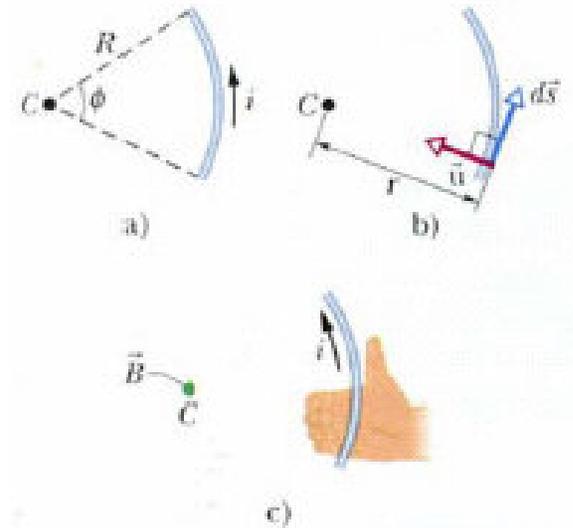
Champ magnétique créé par un arc circulaire

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i ds \sin 90^\circ}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i ds}{R^2}$$

$$B = \int dB = \int_0^\phi \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i R d\phi}{R^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \int_0^\phi d\phi$$



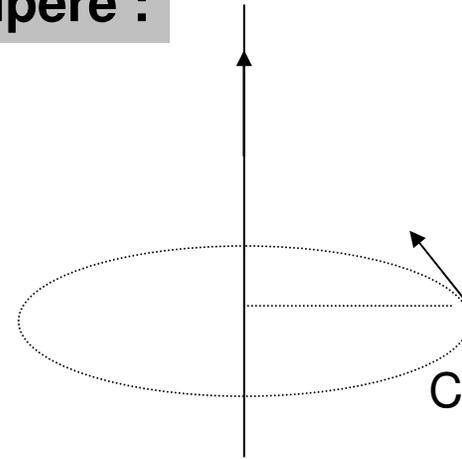
$$B = \frac{\mu_0 i \phi}{4\pi R}$$



Application théorème d'Ampère :

• Le fil infini :

Symétrie :

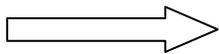


Tout plan contenant le fil infini est plan de symétrie, donc B est perpendiculaire à ces plans

↓

$$\vec{B} = B_{\theta} \vec{e}_{\theta}$$

Fil infini, donc invariant par translation et par rotation autour du fil



$$\vec{B} = B_{\theta}(r) \vec{e}_{\theta}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B 2\pi r = \mu_0 I$$



$$B = B_{\theta} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

• Champ B d' un solénoïde long

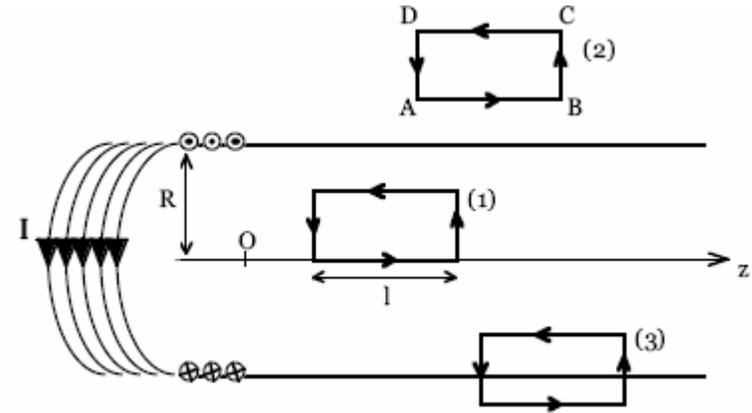
Symétrie :

- Tout plan perpendiculaire à Oz est un plan de symétrie

B est donc perpendiculaire à ce plan



B est donc suivant Oz



- Système invariant par translation suivant Oz et par rotation autour de Oz

$$\vec{B}(r, \theta, z) = B_z(r) \vec{k}$$

Théorème d'Ampère au contour C_2

$$(B_1 - B_2)l = 0$$



$$B_1 = B_2$$

Donc : B est uniforme à l'extérieur du solénoïde

Comme B est nul à l'infini, donc B à l'extérieur = 0

Champ à l'intérieur du solénoïde .

Le contour (C1) d'intégration permet de montrer que B est uniforme à l'intérieur du solénoïde.

Th. d'Ampère pour le contour C3

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = Bl = \mu_0 n l I \quad \longrightarrow \quad B = \mu_0 n I$$

• Bobine toroïdale

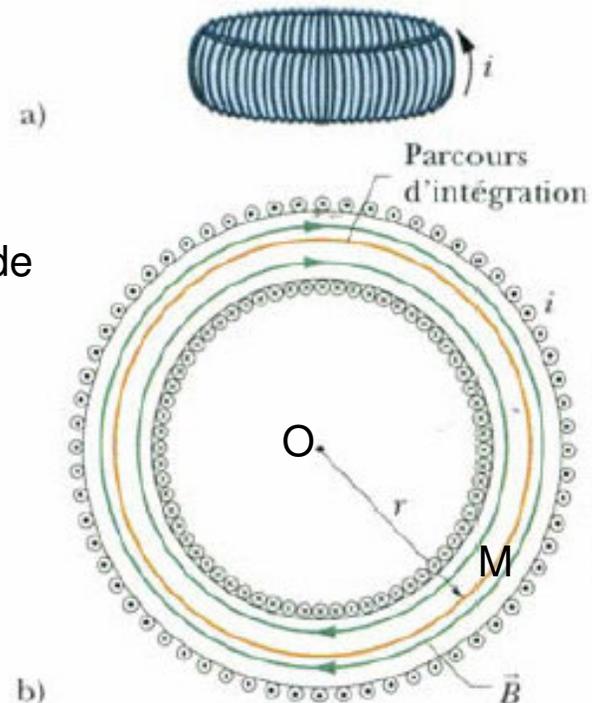
Symétrie

Tout plan passant par OM et normal à la figure est un plan de Symétrie. B est donc perpendiculaire à ce plan

$$\vec{B}(r, \theta, z) = B \vec{e}_\theta$$

Système invariant par rotation autour du tore :

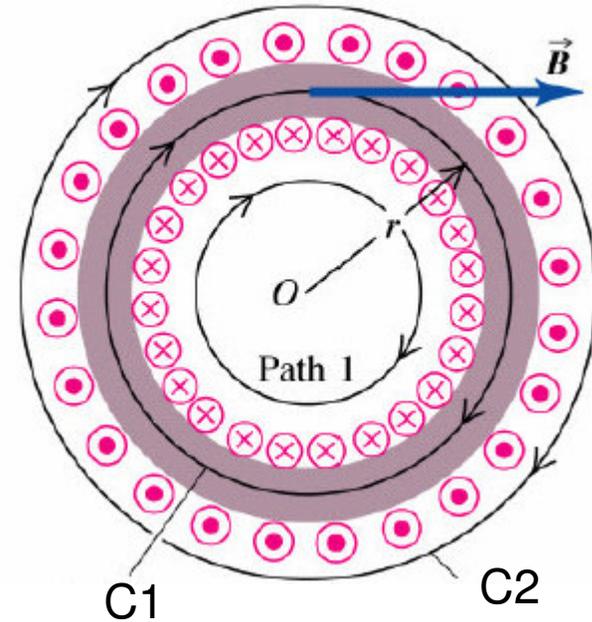
$$\vec{B}(r, \theta, z) = B_\theta(r) \vec{e}_\theta$$



Th d'Ampère sur C₁

Soit N = nombre total de spire dans le tore.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B2\pi r = \mu_0 NI \quad \longrightarrow \quad B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$



Th d'Ampère sur C₂

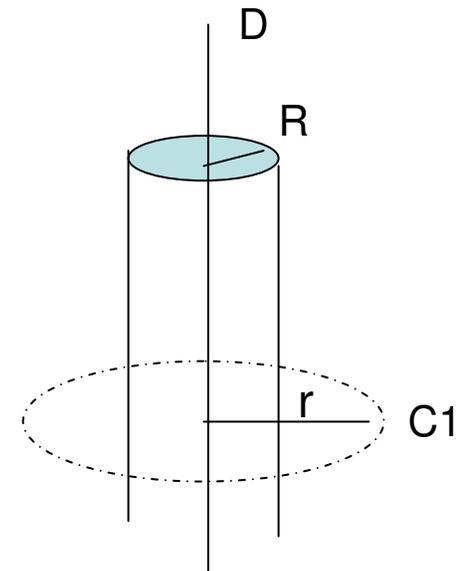
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B2\pi r = 0 \quad \longrightarrow \quad B = 0$$

• Fil conducteur rectiligne infini parcouru par un courant

Symétrie :

Même règles de symétrie pour fil infini donc :

$$\vec{B} = B_\theta(r)\vec{e}_\theta$$



Cas ou le contour est à l'extérieur du fil :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 2\pi r h B_\theta = \mu_0 I$$



$$B = B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Cas ou le contour est à l'intérieur du fil :

$$\sum I_{\text{int}} = \int_C \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad \text{J est la densité du courant du conducteur}$$

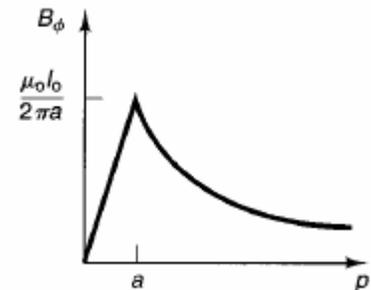
On a : le courant qui passe dans le conducteur est $I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S} = J 2\pi R^2$

D'où $J = \frac{I}{2\pi R^2}$

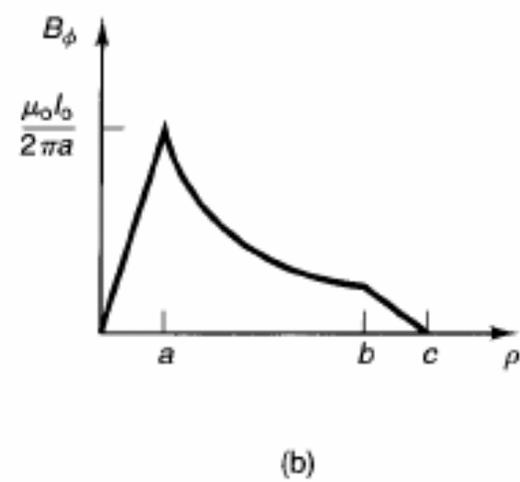
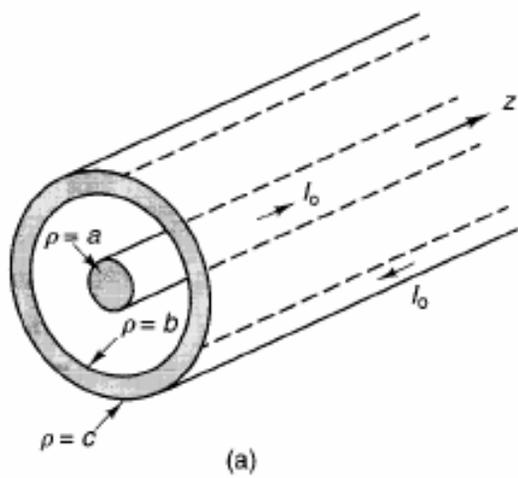
Th d'Ampère
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{int}} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{S} = 2\mu_0 J \pi r$$
$$= B 2\pi r$$



$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$



Exemple: câble coaxial



Plan infini

Trouvez le champ magnétique \mathbf{B} à une distance z au dessus d'un plan infini portant un courant de densité surfacique uniforme \mathbf{J}_s dirigé suivant $+\hat{x}$

Symétrie

- Tout plan XoZ est plan de symétrie

Donc \mathbf{B} est suivant Oy

- Système invariant par translation suivant Ox et Oy

Donc : $\mathbf{B} = B(z)\mathbf{e}_y$

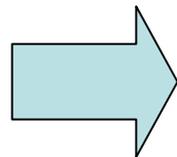
On a
$$J^s = \frac{dI}{dy}$$

Th d'Ampère suivant le contour C :

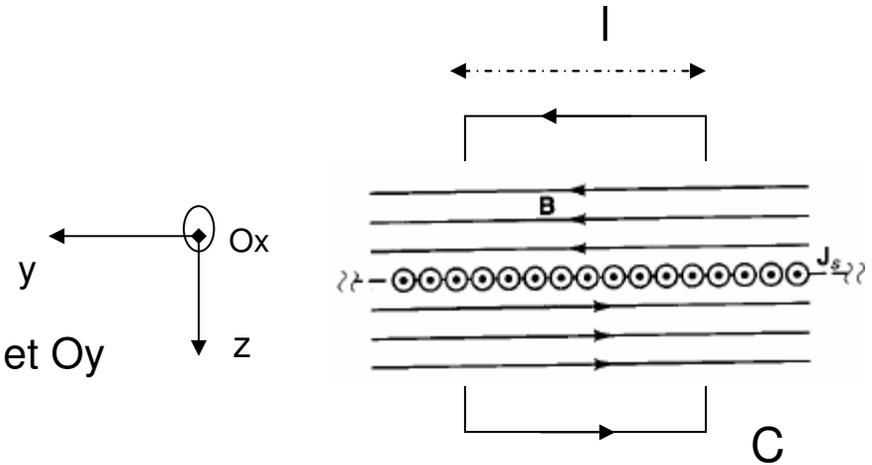
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int dI$$



$$2B(z)l = \mu_0 J^s l$$



$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 J^s}{2} \mathbf{e}_y & z > 0 \\ -\frac{\mu_0 J^s}{2} \mathbf{e}_y & z < 0 \end{cases}$$



Cylindre infini parcouru par une densité surfacique

$\vec{J}_z^s = \vec{M} \sin \theta$ M est une constante positive dirigée suivant Ox

$0 < \theta < \pi$ Le courant est suivant +Oz

$\pi < \theta < 2\pi$ Le courant est suivant -Oz

Symétrie Le plan (Oy, -Oy) est un plan de symétrie

➔ B est suivant Ox

Le fil infini de parcouru par le courant $dI = J_s R d\theta$

Crée au point O le champ : $dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi R}$

D'où : $dB_x = \vec{dB} \cdot \vec{e}_x = dB \sin \theta$

$$B_y = -\int \frac{\mu_0 dI}{2\pi R} \sin \theta = -\frac{\mu_0}{2\pi R} \int MR \sin^2 \theta d\theta = \frac{\mu_0 M}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\mu_0 M}{2}$$



$$B_y = \frac{\mu_0 M}{2}$$

