

Exercice 2

On définit la fonction $f : x \mapsto \frac{-x^2 + 3x - 6}{x - 1}$ et l'on note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Déterminer son domaine de définition.
2. Montrer que $f(x) = -x + 2 - \frac{4}{x - 1}$ pour tout réel $x \neq 1$.
3. (a) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
(b) Que peut-on en déduire pour la courbe \mathcal{C}_f ?
4. (a) Montrer que \mathcal{C}_f admet une asymptote oblique Δ dont on précisera l'équation.
(b) Etudier la position relative de la courbe \mathcal{C}_f et de la droite Δ .
- 5.
6. (a) Déterminer la fonction dérivée de f .
(b) Etudier en détail le signe de cette dérivée.
(c) Etablir le tableau de variations de la fonction f .
7. Déterminer une équation de la tangente T à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 2.
8. Donner l'allure de la courbe \mathcal{C}_f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
Placer également les diverses tangentes et asymptotes rencontrées en cours d'étude.

Exercice 2

1. La quantité $f(x)$ est définie si et seulement si son dénominateur $x - 1$ est non nul, ce qui équivaut à $x \neq 1$. Ainsi

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$$

2. Partons du membre de droite de l'égalité proposée : pour tout $x \neq 1$, on a

$$-x + 2 - \frac{4}{x-1} = \frac{(-x+2)(x-1) - 4}{x-1} = \frac{-x^2 + 2x + x - 2 - 4}{x-1} = \frac{-x^2 + 3x - 6}{x-1} = f(x) \quad \text{ce qu'il fallait démontrer.}$$

3. (a) En $-\infty$

On sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$.

Alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 = -\infty$ puis $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x-1} = 0$ par somme puis quotient de limites. De même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$ puis $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x + 2 = +\infty$ par produit puis somme de limites.

Il s'ensuit alors par somme de limites que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

En $+\infty$ (la démarche est identique)

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$.

Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x-1} = 0$ par somme puis quotient de limites. De même, $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x + 2 = -\infty$ par produit puis somme de limites.

Il s'ensuit alors par somme de limites que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

En 1 : on a $f(x) = -x + 2 - 4 \times \frac{1}{x-2}$ pour tout $x \neq 1$.

Déjà, $\lim_{x \rightarrow 1} -x + 2 = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 0$ (expressions définies en 0).

• Or, $x - 1 < 0$ pour tout $x < 1$.

On en déduit alors par inverse de limites que $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{x-1} = -\infty$

On conclut par produit puis somme de limites que $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$

• De même, $x - 1 > 0$ pour tout $x > 1$.

On en déduit alors par inverse de limites que $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{x-1} = +\infty$

On conclut par produit puis somme de limites que $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty$

- (b) Comme $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty$, on peut affirmer que

La droite \mathcal{D} d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe \mathcal{C}_f .

4. (a) Pour tout $x \neq 1$, on a $f(x) - (-x + 2) = -\frac{4}{x-1}$.

Or, on vient de voir que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x-1} = 0$. Par conséquent,

La courbe \mathcal{C}_f admet la droite Δ d'équation $y = -x + 2$ pour asymptote en $-\infty$ et en $+\infty$.

(b) Pour tout $x \neq 1$, $f(x) - (-x + 2) = \frac{4}{1-x}$ est du signe de $1-x$, si bien que $f(x) > -x + 2$ pour $x \in]-\infty; 1[$ et $f(x) < -x + 2$ pour $x \in]1; +\infty[$. Ainsi

\mathcal{C}_f est au-dessus de Δ sur $]-\infty; 1[$ et en-dessous de Δ sur $]1; +\infty[$.

6. (a) La fonction f étant un quotient de polynômes, elle est dérivable sur son domaine de définition. En utilisant la formule $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ pour v une fonction dérivable ne s'annulant pas, on obtient pour tout $x \neq 1$

$$f'(x) = -1 + \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{2^2 - (x-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{[2 + (x-1)][2 - (x-1)]}{(x-1)^2}$$

soit

Pour tout $x \neq 1$, $f'(x) = \frac{(x+1)(3-x)}{(x-1)^2}$

(b) Dressons le tableau de signe de f' sur \mathcal{D}_f :

x	$-\infty$	-1	1	1	3	$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$3-x$		$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(x-1)^2$		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

(c) On en déduit le tableau de variations de f sur \mathcal{D}_f :

x	$-\infty$	-1	1	1	3	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	0	$-$			
$f(x)$	$+\infty$	\searrow	5	\nearrow	$+\infty$	$-\infty$	\nearrow	-3	\searrow	$-\infty$

Ne pas oublier de placer les limites « aux bouts des flèches ».

En l'occurrence, $f(-1) = 1 + 2 - \frac{4}{-2} = 5$ et $f(3) = -3 + 2 - \frac{4}{2} = -3$.

De plus, f' s'annule en -1 et en 3 , si bien que la courbe \mathcal{C}_f admet des tangentes horizontales aux points $A(-1; 5)$ et $B(3; -3)$. Elles doivent impérativement apparaître sur le tracé.

7. Comme $f(2) = -2 + 2 - \frac{4}{2-1} = -4$ et que $f'(2) = \frac{(2+1)(3-2)}{(2-1)^2} = 3$, alors

La tangente T à la courbe \mathcal{C}_f au point $C(2; -4)$ a pour équation réduite $y = 3(x-3) - 4 = 3x - 10$.

8. En plaçant les deux asymptotes et les trois tangentes rencontrées en cours d'étude,