

e4a PHYSIQUE 1 PSI 1999**PARTIE I : Etude électrocinétique de la ligne coaxiale****I.A Absence de pertes :**

I.A.1 a) $i(z, t) = i(z + dz, t) + Cdz \frac{\partial u}{\partial t}$ d'où $\frac{\partial i}{\partial z} = -C \frac{\partial u}{\partial t}$.

I.A.1 b) $u(z, t) = u(z + dz, t) + Ldz \frac{\partial i}{\partial t}$ d'où $\frac{\partial u}{\partial z} = -L \frac{\partial i}{\partial t}$.

I.A.1 c) Des 2 équations précédentes, on déduit : d'où $\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$ avec $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ qui représente la célérité des ondes.

$LdzCdz$ est homogène à l'inverse du carré d'une pulsation, donc LC est en $s^2.m^{-2}$, donc v est bien homogène à une vitesse.

I.A.1 d) $\psi(z, t) = f\left(t - \frac{z}{v}\right) + g\left(t + \frac{z}{v}\right)$ c'est-à-dire la somme d'une onde plane progressive se propageant selon les z croissants et d'une onde plane progressive se propageant selon les z décroissants.

I.A.2 a) La symétrie cylindrique permet de dire que le champ électrique est radial (tout plan contenant l'axe de la ligne est plan de symétrie pour la distribution de charges, donc aussi pour le champ électrique ; et idem pour les plans orthogonaux à l'axe)

D'après le théorème de Gauss sur un cylindre de rayon ρ , on a $E2\pi\rho\ell = Q/\epsilon$, d'où $\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon\rho\ell} \vec{u}_\rho$.

La différence de potentiel entre les 2 armatures s'écrit donc : $V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{Q}{2\pi\epsilon\ell} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$. D'où $C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$

I.A.2 b) En négligeant (comme le suggère l'énoncé) les courants de déplacement, la symétrie cylindrique permet de dire que le champ magnétique est orthoradial (tout plan contenant l'axe de la ligne est plan de symétrie pour la distribution de courants de conduction, donc le champ magnétique y est partout orthogonal au plan). D'après le théorème d'Ampère sur un cercle de

rayon ρ , on a $B2\pi\rho = \mu_0 i$, d'où $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} \vec{u}_\theta$.

Le flux à travers le rectangle de hauteur dz dans l'espace entre les 2 conducteurs s'écrit donc :

$d\phi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0}{2\pi} idz \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\mu_0}{2\pi} idz \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$. D'où $L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

I.A.2 c) $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, d'où en prenant le rotationnel : $\vec{\Delta} \vec{B} - \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$, d'où $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{n}$

I.B Prise en compte des pertes :

I.B.1 a) $i(z, t) = i(z + dz, t) + Cdz \frac{\partial u}{\partial t} + Gu dz$ d'où $\frac{\partial i}{\partial z} = -C \frac{\partial u}{\partial t} - Gu$.

I.B.1 b) $u(z, t) = u(z + dz, t) + Ldz \frac{\partial i}{\partial t} + Rdz i$ d'où $\frac{\partial u}{\partial z} = -L \frac{\partial i}{\partial t} - Ri$.

I.B.1 c) En dérivant à nouveau, on en déduit, ψ pouvant être aussi bien remplacé par i que par u :

$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \beta \frac{\partial \psi}{\partial t} - \gamma \psi = 0$, avec $\alpha = LC$, $\beta = RC + GL$, et $\gamma = GR$.

Comme au I.A, les deux premiers termes sont homogènes. De plus, conformément aux relations entre impédances, on a :

$\left[\frac{1}{Gdz}\right] = [Rdz] = \left[\frac{1}{C\partial z}\right] = [L\partial z]$ et donc $\frac{1}{[Gdz]} = [Rdz] = \frac{1}{\left[Cdz \frac{\partial}{\partial t}\right]} = \left[Ldz \frac{\partial}{\partial t}\right]$, d'où : $\left[RC \frac{\partial}{\partial t}\right] = \left[LC \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] = [GR]$

I.B.2 a) On remplace dans l'équation différentielle :

$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} + LC\omega^2 \varphi - j\omega(RC + GL)\varphi - GR\varphi = 0$

I.B.2 b) On remplace dans l'équation différentielle complexe, et on obtient : $\underline{r}^2 + LC\omega^2 - j\omega(RC + GL) - GR = 0$, d'où : $\underline{r}^2 = (R + jL\omega)(G + jC\omega)$. Par conséquent, $\underline{r} = \pm \underline{k}$, où $\underline{k}$ est une racine carrée complexe de l'expression précédente. De plus, $R + jL\omega$ et $G + jC\omega$ sont des complexes d'argument compris entre 0 et $\pi/2$, donc on peut prendre pour $\underline{k}$ la racine dont les parties réelle et imaginaire sont positives.

I.B.2 c) Pour commencer, remarquons que le $\underline{k}$ introduit ici n'est pas celui habituel. Il a pu déstabiliser les candidats.

En écrivant que $\underline{\psi} = (\underline{A}e^{kz} + \underline{B}e^{-kz})$, on retrouve bien l'expression I.4 :

$\underline{\psi} = (\underline{A}e^{k'z}e^{j(\omega t + k''z)} + \underline{B}e^{-k'z}e^{j(\omega t - k''z)})$, c'est-à-dire la somme de 2 ondes planes progressives se propageant en sens inverse en s'atténuant.

I.B.3 a). $\underline{u}^+(z, t) = \underline{U}_0^+ e^{-k'z} e^{j(\omega t - k''z)}$ et $\underline{i}^+(z, t) = \underline{I}_0^+ e^{-k'z} e^{j(\omega t - k''z)}$

I.B.3 b). D'après la relation I.B.a, $-(-k' - jk'')\underline{i}^+ = (Cj\omega + G)\underline{u}^+$ d'où $\underline{Z}_C = \frac{\underline{k}}{G + jC\omega}$.

Or, on a $\underline{k}^2 = (R + jL\omega)(G + jC\omega)$, donc $\frac{\underline{k}}{G + jC\omega} = \frac{R + jL\omega}{\underline{k}}$, puis $\underline{Z}_C^2 = \left(\frac{\underline{k}}{G + jC\omega} \right) \left(\frac{R + jL\omega}{\underline{k}} \right)$, et finalement :

$$\underline{Z}_C = \left(\frac{R + jL\omega}{G + jC\omega} \right)^{1/2}$$

I.B.3 c). Les pertes négligeables correspondent à $\omega \gg R/L$ et $\omega \gg G/C$

Alors $\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi}$, ce qui peut s'écrire : $\underline{Z}_C = \frac{\mu_0 v}{2\pi} \ln(R_2/R_1)$

I.B.4 a). On a vu que $\underline{u}^+ = \underline{Z}_C \underline{i}^+$. On a, de la même façon $\underline{u}^- = -\underline{Z}_C \underline{i}^-$, d'où $\underline{i}(z, t) = \frac{1}{\underline{Z}_C} [\underline{U}_0^+ e^{j\omega t - kz} - \underline{U}_0^- e^{j\omega t + kz}]$

I.B.4 b). $\underline{Z}(z) = \frac{\underline{u}(z, t)}{\underline{i}(z, t)} = \underline{Z}_C \frac{\underline{U}_0^+ e^{j\omega t - kz} + \underline{U}_0^- e^{j\omega t + kz}}{\underline{U}_0^+ e^{j\omega t - kz} - \underline{U}_0^- e^{j\omega t + kz}}$ d'où $\underline{Z}(z) = \underline{Z}_C \frac{\underline{U}_0^+ e^{-kz} + \underline{U}_0^- e^{+kz}}{\underline{U}_0^+ e^{-kz} - \underline{U}_0^- e^{+kz}}$

I.B.4 c). En $z=0$: $\underline{u}(0, t) = V_0 e^{j\omega t}$ et donc $\underline{U}_0^+ + \underline{U}_0^- = V_0$

En $z = \ell$: $\underline{Z}(\ell) = \underline{Z}_D$ et donc $\underline{Z}_D = \underline{Z}_C \frac{\underline{U}_0^+ e^{-k\ell} + \underline{U}_0^- e^{+k\ell}}{\underline{U}_0^+ e^{-k\ell} - \underline{U}_0^- e^{+k\ell}}$

On dispose ainsi de 2 équations à 2 inconnues, ce qui permet de déterminer $\underline{U}_0^+$ et $\underline{U}_0^-$.

I.B.4 d) La résolution donne : $\underline{U}_0^+ = V_0 \frac{e^{2k\ell}(\underline{Z}_C + \underline{Z}_D)}{\underline{Z}_D(1 + e^{2k\ell}) + \underline{Z}_C(e^{2k\ell} - 1)}$, ou encore $\underline{U}_0^+ = V_0 \frac{e^{k\ell}(\underline{Z}_C + \underline{Z}_D)}{2\underline{Z}_D \text{ch}(\underline{k}\ell) + 2\underline{Z}_C \text{sh}(\underline{k}\ell)}$

puis $\underline{U}_0^- = V_0 \frac{(\underline{Z}_D - \underline{Z}_C)}{\underline{Z}_D(1 + e^{2k\ell}) + \underline{Z}_C(e^{2k\ell} - 1)}$, ou encore $\underline{U}_0^- = V_0 \frac{e^{-k\ell}(\underline{Z}_D - \underline{Z}_C)}{2\underline{Z}_D \text{ch}(\underline{k}\ell) + 2\underline{Z}_C \text{sh}(\underline{k}\ell)}$

On en déduit : $\underline{Z}(z) = \underline{Z}_C \frac{\underline{Z}_C \text{sh}(\underline{k}(\ell - z)) + \underline{Z}_D \text{ch}(\underline{k}(\ell - z))}{\underline{Z}_C \text{ch}(\underline{k}(\ell - z)) + \underline{Z}_D \text{sh}(\underline{k}(\ell - z))}$

I.B.4 e). $\underline{u}(z, t) = \underline{V}(t) \frac{e^{k(\ell - z)}(\underline{Z}_C + \underline{Z}_D)}{2\underline{Z}_D \text{ch}(\underline{k}\ell) + 2\underline{Z}_C \text{sh}(\underline{k}\ell)} + \underline{V}(t) \frac{e^{k(z - \ell)}(\underline{Z}_D - \underline{Z}_C)}{2\underline{Z}_D \text{ch}(\underline{k}\ell) + 2\underline{Z}_C \text{sh}(\underline{k}\ell)}$,

d'où $\underline{u}(z, t) = \underline{V}(t) \frac{\underline{Z}_C \text{sh}(\underline{k}(\ell - z)) + \underline{Z}_D \text{ch}(\underline{k}(\ell - z))}{\underline{Z}_D \text{ch}(\underline{k}\ell) + \underline{Z}_C \text{sh}(\underline{k}\ell)}$. En introduisant les notations de l'énoncé, on peut écrire :

$\underline{u}(z, t) = \underline{V}(t) \frac{\text{sh}(\underline{\phi})\text{sh}(\underline{k}(\ell - z)) + \text{ch}(\underline{\phi})\text{ch}(\underline{k}(\ell - z))}{\text{ch}(\underline{\phi})\text{ch}(\underline{k}\ell) + \text{sh}(\underline{\phi})\text{sh}(\underline{k}\ell)}$, ou encore $\underline{u}(z, t) = \underline{V}(t) \frac{\text{ch}(\underline{k}(\ell - z) + \underline{\phi})}{\text{ch}(\underline{k}\ell + \underline{\phi})}$

En divisant cette expression par $\underline{Z}(z)$, on obtient :
$$\underline{i}(z, t) = \frac{\underline{V}(t)}{\underline{Z}_C} \frac{\text{sh}(\underline{k}(\ell - z) + \underline{\phi})}{\text{ch}(\underline{k}\ell + \underline{\phi})}$$

Ces solutions correspondent à des ondes stationnaires, car les variations spatiales et temporelles sont découplées.

I.B.5 a). La puissance transmise est maximale lorsqu'il n'y a pas d'onde réfléchie, c'est-à-dire lorsque $\underline{U}_0^- = 0$.

D'après le IB4e, cela correspond à $\underline{Z}_D = \underline{Z}_C$. En remplaçant dans l'expression de l'impédance $\underline{Z}(z)$, on voit que cela conduit à $\underline{Z}(z) = \underline{Z}_C$

I.B.5 b). Une ligne infinie correspond au passage à la limite $\ell \rightarrow \infty$. La première expression du IB4b donne alors $\underline{U}_0^+ = V_0$ puis de même $\underline{U}_0^- = 0$. Cela entraîne $\underline{i}(z, t) = \frac{\underline{u}(z, t)}{\underline{Z}_C}$, et donc bien $\underline{Z}(z) = \underline{Z}_C$ pour tout z .

Commentaires : si la ligne est infinie, on ne ressent pas l'effet du bout de ligne, donc il n'existe pas d'onde réfléchie, donc $\underline{u} = \underline{u}^+$ et $\underline{i} = \underline{i}^+$, ce qui donne bien $\underline{Z}(z) = \underline{Z}_C$.

I.B.6 a). D'après le IB3c, on a $\underline{Z}_C^{\text{SP}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$. De plus, l'équation I-3, avec $R=0$ et $G=0$ donne $(\underline{k}^{\text{SP}})^2 = -LC\omega^2$,
D'où $\underline{k}^{\text{SP}} = 0$ et $\underline{k}^{\text{SP}} = \omega\sqrt{LC}$

I.B.6 b). En utilisant l'équation I-7, on obtient :
$$\underline{Z}_e^{\text{SP}} = \underline{Z}^{\text{SP}}(0) = \underline{Z}_C \frac{\underline{Z}_C \text{sh}(\underline{k}^{\text{SP}} \ell) + \underline{Z}_D \text{ch}(\underline{k}^{\text{SP}} \ell)}{\underline{Z}_C \text{ch}(\underline{k}^{\text{SP}} \ell) + \underline{Z}_D \text{sh}(\underline{k}^{\text{SP}} \ell)}$$

On en déduit :
$$\underline{Z}_e^{\text{SP}} = \underline{Z}_C^{\text{SP}} \frac{\underline{Z}_D + j\underline{Z}_C^{\text{SP}} \tan(\underline{k}^{\text{SP}} \ell)}{\underline{Z}_C^{\text{SP}} + j\underline{Z}_D \tan(\underline{k}^{\text{SP}} \ell)}$$

Cas particulier n°1 : ligne ouverte en $z = \ell$. Le module de $\underline{Z}_D$ est alors infini, d'où
$$\underline{Z}_e^{\text{SP}} = \frac{\underline{Z}_C^{\text{SP}}}{j \tan(\underline{k}^{\text{SP}} \ell)}$$

Cas particulier n°2 : ligne court-circuitée en $z = \ell$. Le module de $\underline{Z}_D$ est alors nul, d'où
$$\underline{Z}_e^{\text{SP}} = j\underline{Z}_C^{\text{SP}} \tan(\underline{k}^{\text{SP}} \ell)$$

Cas particulier n°3 : $\ell \underline{k}^{\text{SP}} = \pi/2 + n\pi$. La tangente est infinie, d'où :
$$\underline{Z}_e^{\text{SP}} = \frac{(\underline{Z}_C^{\text{SP}})^2}{\underline{Z}_D}$$

Cas particulier n°4 : $\ell \underline{k}^{\text{SP}} = n\pi$. La tangente est nulle, d'où :
$$\underline{Z}_e^{\text{SP}} = \underline{Z}_D$$

Corrigé de e3a physique PSI 2008

A / ÉTUDE DE LA BARRE EN TRACTION

A.1. Le scientifique le plus célèbre contemporain de Hooke est Newton.

A.2. $F = \frac{YS}{L} \Delta L$ est semblable (y compris pour le signe) à $F = K_{eq} \Delta L$, avec
$$K_{eq} = \frac{YS}{L}$$

A.3.
$$K_{eq} = \frac{2,1 \times 10^{11} \times 5 \times 10^{-4}}{0,5} = 2,1 \times 10^8 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$\Delta L = \frac{F}{K_{eq}} = \frac{10^4}{2,1 \times 10^8} = 4,76 \times 10^{-5} \text{ m}$$

A.4. Un cube d'arête d contient un atome (1 atome par petite maille donc), d'où
$$nd^3 = 1$$

A.5. Soit deux ressorts identiques de raideurs K , tensions F et allongements ΔL , disposés en parallèle. L'ensemble équivaut à un ressort de tension $2F$ et d'allongement ΔL , d'où $K_{\text{parallèle}} = \frac{2F}{\Delta L} = 2K$.

Soit deux ressorts identiques de raideurs K , tensions F et allongements ΔL , disposés en série. L'ensemble équivaut à un ressort de tension F et d'allongement $2\Delta L$, d'où $K_{\text{série}} = \frac{F}{2\Delta L} = \frac{K}{2}$.

Dans la barre, chaque chaîne comporte $\frac{L}{d}$ ressorts en série et il y a $\frac{S}{d^2}$ chaîne en parallèle.

A.6. La raideur d'une chaîne est $\frac{K}{L/d}$ et celle de l'ensemble des chaînes est $K_{eq} = \frac{S}{d^2} \frac{K}{L/d} = \frac{KS}{Ld} = \frac{YS}{L}$. D'où $Y = \frac{K}{d}$.

La loi de Hooke est vérifiée par ce modèle en chaînes d'atomes, puisque $Y = \frac{K}{d}$, indépendant de S , L , F et ΔL , est une propriété du matériau indépendante des conditions où il se trouve.

B / MODÈLE DE LA CHAÎNE INFINIE D'OSCILLATEURS

B.1. L'allongement du ressort reliant les atomes de rangs $q-1$ et q est $u_q - u_{q-1}$, d'où l'expression de la loi fondamentale de la dynamique :

$$\begin{aligned} m\ddot{u}_q &= -K(u_q - u_{q-1}) - K(u_q - u_{q+1}) \\ \ddot{u}_q + \omega_0^2(2u_q - u_{q-1} - u_{q+1}) &= 0 \end{aligned}$$

B.2. Portons dans cette équation $u_q(t) = A \cos(\omega t - kqd)$:

$$-\omega^2 A \cos(\omega t - kqd) + \omega_0^2 A (2 \cos(\omega t - kqd) - \cos(\omega t - k(q-1)d) - \cos(\omega t - k(q+1)d)) = 0$$

Utilisons $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$

$$\cos(\omega t - k(q-1)d) - \cos(\omega t - k(q+1)d) = 2 \cos(\omega t - kqd) \cos kd$$

$$\text{D'où } [-\omega^2 + \omega_0^2(2 - 2 \cos kd) = 0].$$

Comme $-1 \leq \cos kd \leq +1$, cette relation de dispersion n'a de solution en k que si $\omega \leq \omega_c = 2\omega_0$.

$$f_c = \frac{\omega_0}{\pi}.$$

Pour traiter le cas $\omega > \omega_c$, utilisons le formalisme complexe : $u_q = \text{Re}(A \exp(i(\omega t - kqd)))$ et remplaçons dans l'équation différentielle u_q par $\underline{u}_q = A \exp(i(\omega t - kqd))$:

$$-\omega^2 \underline{u}_q + \omega_0^2 (2\underline{u}_q - \underline{u}_{q-1} - \underline{u}_{q+1}) = 0$$

$$-\omega^2 + \omega_0^2 (2 - \exp(ikd) - \exp(-ikd)) = 0$$

C'est une équation du second degré en $\exp(ikd)$, qui admet deux racines ; si $\omega > 2\omega_0$, ces deux racines donnent deux valeurs de k complexes conjuguées et l'amplitude de l'onde varie exponentiellement en fonction de x .

$$K = Yd = 2,1 \times 10^{11} \times 250 \times 10^{-12} = 52,5 \text{ Nm}^{-1}.$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K N_A}{M}} = \sqrt{\frac{52,5 \times 6,02 \times 10^{23}}{0,056}} = 2,38 \times 10^{13} \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\omega_c = 4,75 \times 10^{13} \text{ rad.s}^{-1}$$

$$f_c = 7,56 \times 10^{12} \text{ Hz}$$

B.3.

$$u_q - u_{q-1} \approx d \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$2u_q - u_{q-1} - u_{q+1} \approx -d \frac{\partial}{\partial x} \left(d \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -d^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

L'équation devient, à l'approximation linéaire :

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - K d^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\text{de la forme } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$\text{avec } V = \sqrt{\frac{K d^2}{m}},$$

soit comme $m = \rho d^3$

$$V = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}.$$

La solution générale est $u = f\left(t - \frac{x}{V}\right) + g\left(t + \frac{x}{V}\right)$, où f et g sont des fonctions arbitraires.

Il s'agit d'une onde progressive si l'une de ces deux fonctions est nulle.

Dans un fluide, le module d'Young doit être remplacé par l'inverse de la compressibilité.

$$V = \sqrt{\frac{2,1 \times 10^{11}}{7800}} = 5190 \text{ m.s}^{-1}.$$

$$\text{B.4. } dE_{\epsilon} = \frac{1}{2} \rho S dx v^2 = \frac{1}{2} \rho S dx A^2 \omega^2 \sin^2 \left(\omega \left(t - \frac{x}{V} \right) \right).$$

$$dE_p = \frac{1}{2} K_{eq} \Delta L^2 = \frac{1}{2} \frac{YS}{dx} (u(x+dx) - u(x))^2 = \frac{1}{2} Y S dx \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2} Y S dx A^2 \frac{\omega^2}{V^2} \sin^2 \left(\omega \left(t - \frac{x}{V} \right) \right).$$

$$\text{Comme } V^2 = \frac{Y}{\rho}, \quad [dE_{\epsilon} = dE_p].$$

$$\sigma = \frac{Y \Delta L}{L} = \frac{Y}{dx} (u(x+dx) - u(x)) = Y \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{A \omega Y}{V} \sin \left(\omega \left(t - \frac{x}{V} \right) \right),$$

$$\text{alors que } v = \frac{\partial u}{\partial t} = -A \omega \sin \left(\omega \left(t - \frac{x}{V} \right) \right) \Rightarrow \sigma = -\frac{Y v}{V}$$

B.5. La puissance transportée par l'onde est le produit de la vitesse v par la force $-\sigma S$ exercée par le coté de la barre d'où vient l'onde sur l'autre coté : $P = -v \sigma S$, soit par unité de surface $P = -\sigma(x, t) v(x, t)$.

$$P = \frac{Y v^2}{V} = \frac{Y A^2 \omega^2}{V} \sin^2 \left(\omega \left(t - \frac{x}{V} \right) \right)$$

$$\text{Comme } \left\langle \sin^2 \left(\omega \left(t - \frac{x}{V} \right) \right) \right\rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle P \rangle = \frac{Y A^2 \omega^2}{2V}.$$

L'énergie emmagasinée par unité de longueur est $\frac{dE}{dx} = \rho S A^2 \omega^2 \sin^2 \left(\omega \left(t - \frac{x}{V} \right) \right)$, soit en valeur moyenne :

$$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle = \frac{\rho S A^2 \omega^2}{2} = \frac{7800 \times 5 \times 10^{-4} \times (10^{-8})^2 \times (2\pi \times 10^6)^2}{2} = 0,00770 \text{ J.m}^{-1}.$$

La puissance est $\langle P \rangle = \frac{Y A^2 \omega^2 S}{2V} = \frac{2,1 \times 10^{11} \times (10^{-8})^2 \times (2\pi \times 10^6)^2 \times 5 \times 10^{-4}}{2 \times 5190} = 40 \text{ watts}.$

On vérifie que $\langle P \rangle = V \left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle$.

B.6. Pour le passage air-acier ou acier-air :

$$R = \left(\frac{7800 \times 5190 - 1,2 \times 330}{7800 \times 5190 + 1,2 \times 330} \right)^2 = 1 - 3,91 \times 10^{-5} \text{ et } T = 3,91 \times 10^{-5}.$$

Nous en concluons que le son ne passe pratiquement pas d'un matériau à l'autre. Pour le faire passer dans un instrument de musique, il faut utiliser une caisse de résonance.

C / FRÉQUENCES PROPRES D'UNE BARRE

C.1. On peut appeler $u_i = f_i(x, t) g_i(x, t)$ une composante de Fourier de $u(x, t)$ ou une onde stationnaire.

A la question « quelle est la définition de » $u_i = f_i(x, t) g_i(x, t)$, la réponse juste me paraît $u_i = f_i(x, t) g_i(x, t)$. Ce n'est pas ce qu'escomptait l'auteur de l'énoncé. Admettons qu'il espérait qu'on lui donne la définition d'une onde stationnaire. On définit habituellement une onde stationnaire comme la superposition de deux ondes progressives sinusoïdales de même fréquence, même amplitude et de vecteurs d'onde opposés.

L'équation des ondes étant linéaire, sa solution générale est une combinaison linéaire de solutions particulières que nous choisirons comme ses composantes de Fourier. Portons $u_i = f_i(x) g_i(t)$ dans l'équation de d'Alembert : on en déduit

$$V = \frac{\omega_i}{k_i}.$$

C.2. Les conditions aux limites sont $u(0, t) = 0$ et $\sigma(L, t) = 0$.

Considérons la condition $u(0, t) = 0$, soit $\sum_i f_i(0) g_i(t) = 0$; comme les ω_i sont tous différents, les g_i sont linéairement indépendants, ce qui impose $f_i(0) = 0$, soit $A_i = 0$.

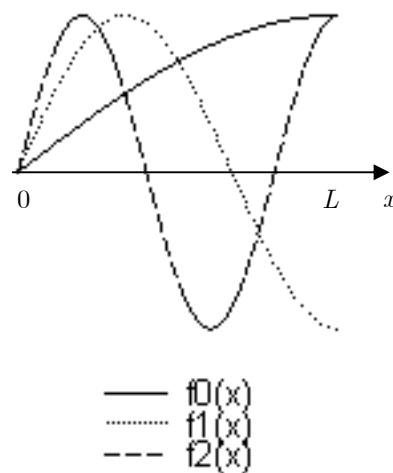
De même, la condition $\sigma(L, t) = 0$, compte tenu de $\sigma = Y \frac{\partial u}{\partial x}$, impose $\frac{df_i}{dx}(L) = 0$, soit $\cos(k_i L) = 0$.

Les solutions sont $k_0 = \frac{\pi}{2L}$, $k_1 = \frac{3\pi}{2L}$, $k_2 = \frac{5\pi}{2L}$, ...

$$u_0 = U_0 \sin \frac{\omega_0 x}{V} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$u_1 = U_1 \sin \frac{3\omega_0 x}{V} \cos(3\omega_0 t + \varphi_1)$$

$$u_2 = U_2 \sin \frac{5\omega_0 x}{V} \cos(5\omega_0 t + \varphi_2)$$



La contrainte est maximale à un instant que nous ne précisons pas ; l'endroit où elle présente ce maximum est :

$$x = 0 \text{ pour } u_0 ;$$

$$x = 0 \text{ et } x = \frac{2L}{3} \text{ pour } u_1 ;$$

$$x = 0, x = \frac{2L}{5} \text{ et } x = \frac{4L}{5} \text{ pour } u_2 .$$

D / RÉGÎME FORCÉ SINUSOÏDAL

D.1. en portant $u = f(x) \cos(\omega t)$ dans $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$, on obtient $f''(x) + \frac{\omega^2}{V^2} f(x) = 0$.

Posons $k = \frac{\omega}{V}$. La solution générale de l'équation différentielle est $f(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$.

La condition aux limites $u(0, t) = A_0 \cos(\omega t)$ impose $A = A_0$.

La condition aux limites $0 = \sigma(L, t) = Y \frac{\partial u}{\partial x}(x = L)$ impose $-A \sin(kL) + B \cos(kL) = 0 \Rightarrow B = A_0 \tan(kL)$.

En résumé, le régime permanent est $u = A_0 \left(\cos \frac{\omega x}{V} + \tan \frac{\omega L}{V} \sin \frac{\omega x}{V} \right) \cos(\omega t)$

D.2. Cette expression est infinie si, n étant un entier positif ou nul, $\frac{\omega L}{V} = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$, soit $\omega = (2n + 1) \frac{\pi V}{2L}$; il y a alors résonance.

L'énoncé parle de résonance d'amplitude, mais, faute d'amortissement, il n'y a pas de distinction entre résonance d'amplitude et résonance de vitesse.

La résonance a lieu quand $L = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}$, λ étant la longueur d'onde du son dans la barre.

Fixons un vibreur à une extrémité de la barre et un accéléromètre à l'autre extrémité. Faisons varier la fréquence du signal actionnant le vibreur. Cherchons les fréquences pour lesquelles l'amplitude du signal produit par l'accéléromètre est maximum. Ces fréquences sont $\frac{(2n + 1)V}{4L}$. On en déduit V et donc Y .

D.3. Pour $n = 0$, $\sqrt{\frac{Y}{\rho}} = V = 4fL \Rightarrow Y = 16\rho f^2 L^2 = 16 \times 7800 \times 2655^2 \times 0,5^2 = 2,2 \times 10^{11} \text{ Pa}$.

Si on tient compte des trois mesures de fréquence, on remarque que, malgré l'incertitude de 1Hz, ces trois mesures sont exactement dans les rapports théoriques 1, 3 et 5 ; l'incertitude réelle sur la mesure de la fréquence pourrait être plus faible que celle annoncée et il aurait été souhaitable de définir les mesures au dixième de hertz près.

Un calcul simple de l'incertitude ne tient compte que d'une mesure de fréquence :

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + 2 \frac{\Delta f}{f} + 2 \frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{7800} + 2 \frac{1}{13275} + 2 \frac{10^{-5}}{0,5} = 3 \times 10^{-4}$$

mais son résultat dépend de la fréquence choisie.

E / CONTRÔLE NON DESTRUCTIF PAR ULTRASONS

E.1. Lors de la diffraction par une pupille circulaire de rayon R , le rayon angulaire du premier anneau noir est $\frac{1,22\lambda}{2R}$. De même,

le demi angle au sommet du cône de divergence des ondes ultrasonores dans l'acier est $\frac{1,22 \times 5190}{0,01 \times 5 \times 10^6} = 0,13 \text{ rad}$,
expression valable puisque petite devant 1.

-
- E.2. Sur la face B, $R \approx 1$, ce qui est favorable. S'il y a une lame d'air entre le palpeur et la pièce à tester, $T \approx (4 \times 10^{-5})^2$, ce qui est très défavorable ; il faut mettre un liquide entre le palpeur et la pièce à tester pour améliorer T .
- E.3. $OO_1 = 5,3 \text{ mm}$ représente T_0 ; $OO_2 = 53 \text{ mm}$ représente l'aller et retour de l'onde, soit $\frac{2AB}{V_L} = \frac{0,2}{5190} \text{ s}$. D'où
$$T_0 = \frac{5,3}{53} \times \frac{0,2}{5190} = 3,85 \times 10^{-6} \text{ s}.$$
- E.4. Si la soupape ne comporte pas de défaut, l'écran ne présente qu'une série de pics de hauteurs décroissantes (peut-être faiblement décroissantes, comme sur la figure 9) et équidistants de $\frac{15}{10} \times 53 = 80 \text{ mm}$.
- E.5. Si la soupape contient un défaut à $CD = 11 \text{ cm}$, l'écran montre aussi des pics secondaires dont le premier est à $\frac{11}{10} \times 53 = 58 \text{ mm}$ de l'émission. On peut confirmer ce diagnostic en plaçant le palpeur à l'autre extrémité de la soupape.