Polynésie septembre 2001

Dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$), unité graphique 4 cm, on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives $z_A = 2\,i$, $z_B = i$, $z_C = -1 + i$, $z_D = 1 + i$.
On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

1. Soit la fonction f de P – {B} dans P qui au point M d'affixe z associe le point M′ d'affixe z′ où $z' = i\left(\dfrac{z-2\,i}{z-i}\right)$.

a. Développer (z + 1 − i) (z − 1 − i).

b. Chercher les points M vérifiant f (M) = M et exprimer leurs affixes sous forme algébrique puis trigonométrique.

2. a. Montrer que, pour tout z différent de i, $|z'| = \dfrac{AM}{BM}$, et que, pour tout z différent de i et de 2 i :

$$\arg(z') = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MB}\,;\overrightarrow{MA})\ (\text{modulo}\,2\pi).$$

b. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que | z′ | = 1.

c. Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que $\arg z' = \dfrac{\pi}{2}$ (modulo 2π).

3. a. Démontrer que $z' - i = \dfrac{1}{z-i}$ et en déduire que $|z' - i| \times |z - i| = 1$, pour tout complexe z différent de i.

b. Soit M un point du cercle C de centre B et de rayon $\dfrac{1}{2}$. Prouver que le point M′ d'affixe z′ appartient à un cercle de centre B et de rayon à déterminer.

CORRECTION

1. *a.* $(z + 1 - i)(z - 1 - i) = [(z - i) + 1]\,[(z - i) - 1]$
$(z + 1 - i)(z - 1 - i) = (z - i)^2 - 1 = z^2 - 2\,i\,z - 2$

1. *b.* $f(M) = M \Leftrightarrow z' = z$ et $z \neq i \Leftrightarrow z = i\left(\dfrac{z-2\,i}{z-i}\right)$ et $z \neq i \Leftrightarrow z(z - i) = i(z - 2\,i)$ et $z \neq i$

$\Leftrightarrow z^2 - 2\,i\,z - 2 = 0$ et $z \neq i \Leftrightarrow (z + 1 - i)(z - 1 - i) = 0$ et $z \neq i \Leftrightarrow z = -1 + i$ ou $z = 1 + i$

$-1 + i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $1 + i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

2. $z' = i\,\dfrac{z_M - z_A}{z_M - z_B}$

$|z'| = |i|\,\dfrac{|z_M - z_A|}{|z_M - z_B|} = \dfrac{AM}{BM}$

$\arg(z') = \arg i + \arg \dfrac{z_M - z_A}{z_M - z_B}$ à 2 π près $\Leftrightarrow$ $\arg(z') = \dfrac{\pi}{2} + (\overrightarrow{BM}\,;\overrightarrow{AM})$ à 2 π près $\Leftrightarrow \arg(z') = \dfrac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MB}\,;\overrightarrow{MA})$ à 2 π près

2. *b.* $|z'| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{AM}{BM} = 1$ et $M \neq B \Leftrightarrow AM = BM$ et $M \neq B \Leftrightarrow$ M décrit la médiatrice de [AB]

2. *c.* $\arg(z') = \dfrac{\pi}{2}$ à 2 π près $\Leftrightarrow M \neq A$ et $M \neq B$ et $(\overrightarrow{MB}\,;\overrightarrow{MA}) = 0$ à 2 π près $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MA}$ colinéaires de même sens avec $M \neq A$ et $M \neq B \Leftrightarrow$ M décrit la droite (AB) privée de [AB]

3. *a.* $z' - i = i\left(\dfrac{z-2\,i}{z-i}\right) - i = i\left(\dfrac{z-2\,i}{z-i} - 1\right)$

$z' - i = i\left(\dfrac{-i}{z-i}\right) = \dfrac{1}{z-i}$ donc pour tout $z \neq i$, $(z' - i)(z - i) = 1$ donc pour tout $z \neq i$, $|z' - i| \times |z - i| = 1$

2. *b.* Si M appartient au cercle de centre B de rayon $\dfrac{1}{2}$ alors $BM = \dfrac{1}{2}$ soit $|z - i| = \dfrac{1}{2}$ donc $|z' - i| \times \dfrac{1}{2} = 1$
soit $|z' - i| = 2$ donc BM' = 2
M' appartient au cercle de centre B de rayon 2.