Classe de Terminale ES

Exercice 1 (d'après bac ES, Inde 2003, 8 points)

1. Question de cours : A et B désignent deux événements d'un même univers E. Supposant connue la définition de la probabilité conditionnelle $p_A(B)$, on dit que B est indépendant de A si $p_A(B) = p(B)$. Démontrer qu'alors A est indépendant de B.
2. A l'issue d'une compétition, des sportifs subissent un contrôle antidopage. Malheureusement, d'une part, certains produits dopants ne sont pas détectés, et certains sportifs sont déclarés dopés à tort.
   On note pour toute la suite de l'exercice :
   D l'événement « le sportif est réellement dopé », $\overline{D}$ l'événement contraire,
   C l'événement « le sportif a été contrôlé positif » $\overline{C}$ l'événement contraire
   E l'événement « le contrôle a commis une erreur ».
   Dans cette question, on suppose que la moitié des sportifs s'est dopée, et que les événements C et D sont indépendants. Sachant que la probabilité que le sportif soit déclaré dopé est de 0,2, déterminer les probabilités
   • que le sportif soit non dopé et contrôlé positif.
   • que le sportif soit dopé et contrôlé négatif
   • que le contrôle ait commis une erreur.
3. Dans cette question, on appelle p la probabilité que le sportif soit dopé, et on suppose que le contrôle fait 10% d'erreurs, c'est-à-dire que 90% des dopés sont contrôlés positifs, et que 10% des non dopés sont contrôlés positifs.
   a) Préciser les données précédentes en termes de probabilités conditionnelles.
   b) Construire un arbre pondéré résumant cette situation.
   c) Calculer, en fonction de p, la probabilité que le sportif soit contrôlé positif.
   d) On s'intéresse à la probabilité qu'un sportif ayant été contrôlé positif soit réellement dopé. Montrer que cette probabilité s'exprime, en fonction de p par $f(p) = \dfrac{0,9p}{0,8p+0,1}$. Résoudre l'inéquation $f(p) \geq 0,9$. Interpréter ce résultat.

Exercice 2 (bac ES, sujet national 2001, 12 points)

On considère les fonctions f et g définies sur $[1 ; +\infty[$ par $f(x) = 1,1x + \ln(x) - \ln(x+1)$, et $g(x) = 1,1x + \dfrac{1}{x}$. On désigne par C_f et C_g leurs courbes respectives dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité 2 cm.

1. Etudier les variations de f sur $[1 ; +\infty[$. Trouver la limite en $+\infty$ de $\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$, en déduire la limite en $+\infty$ de f, dresser le tableau de variation de f.
2. Montrer que la droite D d'équation $y = 1,1x$ est asymptote à C_f. Etudier leurs positions relatives, tracer D et C_f.
3. Etudier les variations de g, la limite de g en $+\infty$. Vérifier que D est une asymptote de C_g, étudier leurs positions relatives. Tracer C_g dans le même repère.
4. Les fonctions f et g modélisent respectivement la quantité d'objets produits et la demande de ces objets. Plus exactement, $f(t)$ désigne la quantité produite près t semaines, et $g(t)$ la demande, à la même date, en milliers d'objets.. Lorsque $f(t) \geq g(t)$, on dit que la demande est satisfaite.
   Démontrer que la demande n'est jamais satisfaite.
   On considère que le niveau de fabrication est satisfaisant lorsque l'écart entre l'offre et la demande est inférieur à 20. En admettant que la fonction $g - f$ est décroissante sur $[1 ; +\infty[$, en déduire que l'équation $g(x) - f(x) = 0,02$ a une unique solution a, dont vous donnerez une valeur approchée à 1 près. Au bout de combien de temps le niveau de fabrication est-il satisfaisant ?