الأعداد العقدية

الثانية سلك بكالوريا علوم تجريبية

مبرهنة

توجد مجموعة $\mathbb{C}$ تتضمن $\mathbb{R}$ و تحقق:

i) يحتوي $\mathbb{C}$ على عنصر غير حقيقي i و يحقق $i^2=-1$

ii) كل عنصر من $\mathbb{C}$ يكتب بكيفية و حيدة على الشكل: $a+ib$ بحيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

iii) المجموعة $\mathbb{C}$ مزودة بعمليتي الجمع و الضرب تمددان نفس العمليتين في $\mathbb{R}$ و لهما نفس الخاصيات

خاصية ليكن $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ و $(a';b')\in\mathbb{R}^2$ $\quad a+ib=a'+ib' \Leftrightarrow a=a'$ و $b=b'$

ليكن عدد عقدي $z=a+ib$ حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

العدد a يسمى الجزء الحقيقي نكتب $\text{Re}(z)=a$ ، و العدد b يسمى الجزء التخيلي نكتب $\text{Im}(z)=b$

خاصية $(\mathbb{C};+;\times)$ جسم تبادلي

1- التمثيل الهندسي لعدد عقدي

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$.

كل نقطة $M(a;b)\in(P)$ هي صورة عدد عقدي وحيد $z=a+ib$ وهذا الأخير يسمى لحق Mونكتب M(z)

أو $z=aff(M)$

العدد العقدي $z=a+ib$ حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ يسمى أيضا لحق المتجهة $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$ نكتب $z=aff(\vec{u})$

* لحق $\overrightarrow{AB}$ هو z_B-z_A حيث $A(z_A)$ و $B(z_B)$

* تكون النقط المختلفة $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $C(z_C)$ مستقيمية إذا و فقط إذا كان $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\in\mathbb{R}$

* التطبيق $M(z)\to M'(z+a)$ من المستوى (P) نحو المستوى (P) هو الازاحة التي متجهتها

$\vec{u}$ حيث $aff(\vec{u})=a$

2- المرافق و المعيار

ليكن عدد عقدي $z=a+ib$ حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$.

* العدد العقدي $z = a - ib$ يسمى مرافق العدد العقدي $z = a + ib$ ونرمز له بـ $\overline{z} = a - ib$.

* العدد الحقيقي $\sqrt{z\overline{z}}$ يسمى معيار العدد العقدي $z = a + ib$. نرمز له بـ $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

لتكن $(z;z') \in \mathbb{C}^2$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{Z}^*$

* $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z) \quad ; \quad z - \overline{z} = 2\operatorname{Im}(z)i$

* $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \qquad \overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'} \qquad \overline{z^n} = \overline{z}^n \qquad \overline{\alpha z} = \alpha.\overline{z} \qquad z' \neq 0 \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

* $\left|\sum_{i=1}^{i=m} z_i\right| \leq \sum_{i=1}^{i=m} |z_i| \qquad m \in \mathbb{N}^*$

* $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$

* $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$

* $|z.z'| = |z||z'| \qquad |z^n| = |z|^n \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \qquad z' \neq 0$

* $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB = |z_B - z_A|$

3- الشكل المثلثي لعدد عقدي والعمدة

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$

ليكن $z = a + ib$ حيث $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ عددا عقديا غير منعدم و النقطة M صورته , وليكن α قياسا

للزاوية $(\widehat{\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}})$.

العدد α يسمى عمدة للعدد العقدي z و نكتب $[2\pi]$ $\arg z \equiv \alpha$.

-* ليكن $z = a + ib$ حيث $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ عددا عقديا غير منعدم و r عددا حقيقيا موجبا قطعا و α

عددا حقيقيا نضع $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$

ومنه $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ حيث $\sin\alpha = \frac{b}{r}$; $\cos\alpha = \frac{a}{r}$ إذن $[2\pi]$ $\arg z \equiv \alpha$

الكتابة $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ تسمى الشكل المثلثي للعدد العقدي z و نكتب $z=[r,\alpha]$

خاصيات

-* اذا كان $z=[r,\alpha]$ و $z'=[r',\alpha']$ فان + $zz'=[rr',\alpha+\alpha']$ و $\frac{z}{z'}=\left[\frac{r}{r'},\alpha-\alpha'\right]$

+ $\bar{z}=[r,-\alpha]$ و $-z=[r,\alpha+\pi]$

+ $z^n=[r^n;n\alpha]$ $\frac{1}{z}=\left[\frac{1}{r};-\alpha\right]$

صيغة موافر $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$ $\forall n\in\mathbb{Z}^*$ $\forall\alpha\in\mathbb{R}$

إذا كان $A(z_A)\neq B(z_B)$ و $D(z_D)\neq C(z_C)$ فان $\arg(z_B-z_A)\equiv\overline{(\vec{e}_1;\overrightarrow{AB})}$ $[2\pi]$

و $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\equiv\overline{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})}$ $[2\pi]$

4- الكتابة الاسية

$z=[r,\alpha]=re^{i\alpha}$ $\sin\alpha=\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$ $\cos\alpha=\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$

5- الجذور النونية لعدد عقدي غير منعدم

الجذور النونية $a=[r,\alpha]$ (جذور المعادلة $z^n=a$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$)هي

$z_k=\left[\sqrt[n]{r};\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right]$ $k\in\{0;1;2........,n-1\}$

الجذور النونية للوحدة أي الجذور النونية لـ 1 هي $z_k=\left[1;\frac{2k\pi}{n}\right]$ $k\in\{0;1;2;.........;n-1\}$

6- المعادلات من الدرجة الثانية

لتكن a و b و c أعدادا عقدية بحيث a غير منعدم .

المعادلة $az^2+bz+c=0$ تقبل حلين في $\mathbb{C}$ هما $z_1=\frac{-b+d}{2a}$; $z_2=\frac{-b-d}{2a}$ حيث d جدر

مربع للمميز b^2-4ac .

الأعداد العقدية Exercices

الثانية سلك بكالوريا علوم تجريبية

تمرين 1

1- حدد الشكل الجبري لكل من الأعداد العقدية $\frac{1}{2-3i}$; $\frac{3-2i}{2+i}$; $\frac{2i}{3-i}+\frac{(1-2i)^2}{i}$

2- أحسب $(1+i)^2$ واستنتج $(1+i)^{230}$

3- أحسب $\sum_{k=0}^{k=521} i^k$

تمرين 2

في المستوى العقدي نعتبر النقط $A(1)$ و $B(z)$ و $C(-iz)$

1- نضع $z=x+iy$ حيث $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ و $z\neq i$ و $z\neq 1$

حدد الشكل الجبري للعددين $\frac{1-z}{1+iz}$ و $\frac{1-i\cdot\overline{z}}{i+i\cdot\overline{z}}$

2- حدد (E) مجموعة النقط B حيث A و B و C نقـــط مستقيمية

3- حدد مجموعة النقط B حيث $\frac{1-i\cdot\overline{z}}{i+i\cdot\overline{z}}$ عدد تخيلي صرف.

تمرين 3

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية $-2i\cdot\overline{z}+z=1$ و $(1-i)z-2\overline{z}=1-5i$

و $z\cdot\overline{z}+\overline{z}=4-3i$ و $2|z|^2-z^2=3$

تمرين 4

في المستوى العقدي حدد مجموعة النقط M(z) في كـــل حالة من الحالتين التاليتين

1- $|z-1+i|=3$ 2- $|z-2|=|z+2i|$

تمرين 5

أكتب على الشكل المثلثي الأعداد عقديـــة $3+i\sqrt{3}$ و $\frac{-1+i}{1+i\sqrt{3}}$ و $(1-i\sqrt{3})^{24}$

تمرين 6

نعتبر العددين العقديين $v=\sqrt{6}+i\sqrt{2}$ و $u=2-2i$

1- احسب معيار وعمدة كل من u و v

2- حدد الكتابة الجبرية والكتابة المثلثية لـ $\frac{u}{v}$ ثم استنتــج $\sin\frac{7\pi}{12}$; $\cos\frac{7\pi}{12}$

تمرين 7

نضع $u=-2+2i$

1- أحسب معيار و عمدة u

2- حل جبريا $z^2=u$ و استنتج $\sin\frac{3\pi}{8}$; $\cos\frac{3\pi}{8}$

تمرين 8

نعتبر العـــدد العقـدي $z=1+i\sqrt{3}$

بين أن النقط $A(z)$ و $B(-z)$ و $C(z^2)$ و $D\left(\frac{2}{z}\right)$ متداورة

تمرين9

-1 ليكن $z_0=\left[1;\frac{2\pi}{5}\right]$. نضع $\alpha=z_0+z_0^4$ و $\beta=z_0^2+z_0^3$

أ- بين أن $1+\alpha+\beta=0$

ب- استنتج أن α و β حلي المعادلة $x^2+x-1=0$

-2 أ- حدد α بدلالة $\cos\frac{2\pi}{5}$

ب- حل المعادلة $x^2+x-1=0$ واستنتج $\cos\frac{2\pi}{5}$

ج- أنشئ النقط $A_0(1)$ و $A_1(z_0)$ و $A_2(z_0^2)$ و $A_3(z_0^3)$ و $A_4(z_0^4)$

حدد طبيعة $A_0A_1A_2A_3A_4$

تمرين10

-1 بين أن $1+e^{i\theta}=2e^{i\frac{\theta}{2}}\cos\frac{\theta}{2}$

-2 $\theta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$. أحسب بدلالة $\tan\theta$ العدد $z=\frac{e^{i2\theta}-1}{e^{i2\theta}+1}$

تمرين11

بين أن $e^{i\frac{\pi}{11}}+e^{i\frac{3\pi}{11}}+e^{i\frac{5\pi}{11}}+e^{i\frac{7\pi}{11}}+e^{i\frac{9\pi}{11}}=\frac{ie^{-i\frac{\pi}{22}}}{2\sin\frac{\pi}{22}}$

استنتج $\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$

تمرين12

ليكن $(z;z')\in\mathbb{C}^2$. بين أن $|z-z'|^2\leq\left(1+|z|^2\right)\left(1+|z'|^2\right)$

تمرين13

ليكن $(x;\alpha)\in\mathbb{R}^2$

أحسب $S_n=\sum_{k=0}^{n}\cos(x+k\alpha)$ و $C_n=\sum_{k=0}^{n}\sin(x+k\alpha)$

(يمكن حساب C_n+iS_n)

تمرين14

اختصر الكتابة $C_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)$

تمرين15

ليكن $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

نعتبر المعادلة (E): $(1+iz)^3(1-i\tan\alpha)=(1-iz)^3(1+i\tan\alpha)$ $z\in\mathbb{C}$

-1 ليكن z_0 حل للمعادلة (E)

أ- بين أن $|1+iz_0|=|1-iz_0|$

ب- استنتج أن z_0 عدد حقيقي

2- أ- أحسب $\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$ بدلالة $e^{i\alpha}$

ت- نضع $z=\tan\theta$ حيث $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. استنتج حلول المعادلة (E)

تمرين 16

نعتبر في $\mathbb{C}$ الحدودية $P(z)=iz^3-(-3+2i)z^2+(-6+4i)z-8i$

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$ علما أنها تقبل حلا حقيقيا.

2- لتكن A وB وC صور جذور المعادلة $P(z)=0$. بين أن المثلث ABC قائم الزاوية.

تمرين 17

نعتبر في $\mathbb{C}$ الحدودية $P(z)=z^3-(-1+4i)z^2+(2-12i)z-20-12i$

1- حدد جبريا الجذرين المربعين للعدد -27 + 36i

2- بين أن المعادلة $P(z)=0$ تقبل حلا تخيليا وحدده.

3- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$

4- لتكن A وB وC صور جذور المعادلة $P(z)=0$

بين أن A وB وC نقط مستقيمية

تمرين 18

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E):\quad z^2+2(1+\cos\theta)z+2(1+\cos\theta)=0$ حيث $\theta\in]-\pi;\pi[$

1- حل المعادلة (E)

2- أحسب معيار و عمدة جدري المعادلة (E) (ناقش حسب قيم θ)

تمرين 19

1- حدد الجذور المكعبة للعددين $v=8i$ و $u=\sqrt{3}+i$

2- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-\left(\sqrt{3}+9i\right)z-8\left(1-i\sqrt{3}\right)=0$

استنتج حلول المعادلة $z^6-\left(\sqrt{3}+9i\right)z^3-8\left(1-i\sqrt{3}\right)=0$

تمرين 20

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^5+1=0$

2- أنشئ صور z_0 وz_1 وz_2 وz_3 وz_4 جذور المعادلة $z^5+1=0$

أ- بين أن $z_0+z_1+z_2+z_3+z_4=0$

ب- استنتج أن $\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{1}{2}$

تمرين 21

1- أكتب على الشكل المثلثي الحلول الثلاثة لكل من المعادلتين $z^3=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ و $z^3=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

2- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(z-1)^6+(z-1)^3+1=0$

تمرين 22

لكل عدد عقدي مخالف لـ i نضع $u=\frac{\bar{z}(z-i)}{\bar{z}+i}$

1- اثبت أن $\forall z\in\mathbb{C}-\{i\}:\arg u\equiv-\arg z+2\arg(z-i)\quad[2\pi]$ و أن $|u|=|z|$

2- بين إذا كان $|z|=1$ فان $u=-i$

3- حدد مجموعة النقط M(z) حيث u تخيلي صرف.

تمرين 23

نعتبر المعادلة (E) $z^2+i\left(2^{\theta+1}\sin\theta\right)z-2^{2\theta}=0$ $z\in\mathbb{C}$ حيث $\theta\in[0,2\pi[$

1- حل المعادلة (E) و أكتب الحلين على شكلهما المثلثي

2- في المستوى العقدي نعتبر A و B صورتي حلي المعادلة (E)

3- حدد θ لكي يكون OAB مثلث متساوي الأضلاع

تمرين 24

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة $E_n: \quad z^n=(iz-2i)^n$

حيث n عدد صحيح طبيعي غير منعدم

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E_2)

2- أ- أكتب كلا من العددين $1+i\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}-i$ على الشكل المثلثي.

ب- استنتج أن $1+i\sqrt{3}$ هو حل للمعادلة (E_{12})

3-- أ– في المستوى العقدي،حدد مجموعة النقط M(z) حيث z يحقق المعادلة (E_1)

ب- استنتج جميع حلول المعادلة (E_n) تكتب على الشكل $1+ai$ حيث $a\in\mathbb{R}$.

تمرين25

نعتبر $P(z)=(\text{m}-3)\text{z}^6-\text{m}\left(3\text{z}^4-9z^2\right)-81$

1- نفترض أن m=0، حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$ ثم أكتب الحلول على الشكلين المثلثي و الجبري .

2- نضع m=4

أ- حدد العددين a و b لكي يكون $P(z)=\left(z^2-9\right)\left(\text{z}^4+az^2+b\right)$

ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$

ج- تحقق أن الحلول تكتب على الشكل $z_k=3\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3}$

تمرين26

نعتبر في $\mathbb{C}$ الحدودية $P(z)=z^3+2\left(1-i\sqrt{3}\right)z^2+2\left(1-i\sqrt{3}\right)z-8\left(1+i\sqrt{3}\right)$

1- بين أن العدد $z_1=1+i\sqrt{3}$ حل للمعادلة $P(z)=0$

2- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$ (ليكن z_2 و z_3 الجذرين الآخرين)

3- لتكن A وB وC و D على التوالي صور الأعداد العقدية z_1 و z_2 و z_3 و $\frac{2}{z_1}$.

بين أن النقط A وB وC و D متداورة

تمرين27

1- أ- حدد الجذرين المربعين للعدد العقدي $-2-2i\sqrt{3}$

a. حل المعادلة $(E): z\in\mathbb{C} \quad z^2-\left(3+i\sqrt{3}\right)z+2\left(1+i\sqrt{3}\right)=0$

2- نضع $u=\left(\overline{z_1}\right)^2+\left(\overline{z_2}\right)^2$ حيث z_1 وz_2 هما حلا (E)

3- تحقق أن $u=2-2i\sqrt{3}$ ثم أعط الشكل المثلثي للعدد u

4- أثبت أن u^{2001} عدد حقيقي سالب

5- نعتبر في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(o;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ النقط A و B و C صور الأعداد العقدية 2 و $1+i\sqrt{3}$ و $3+i\sqrt{3}$ على التوالي .

بين أن المثلث ABC متساوي الأضلاع

تمرين 28

نعتبر المعادلة (E) : $z\in\mathbb{C}\quad z^3+(-2+i)z^2+3(1-i)z+2i-2=0$

1- بين أن المعادلة (E) تقبل حلا حقيقيا z_1 مع تحديده

2- أ- حدد الجذرين المربعين لـ $-8+6i$

ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2+(-1+i)z+2-2i=0$

3- حدد الجذرين الآخرين z_2 و z_3 للمعادلة (E).

4- أ- أنشئ النقط $A(z_1)\ ;\ B(z_2)\ ;\ C(z_3)$ في المستوى العقدي .

ب- حدد العدد a لحق M حيث $MA=MB=MC$

تمرين 29

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلتين

$$(E)\quad z^2+(1+i)z+2i=0$$

$$(F)\quad z^3+2-2i=0$$

1- حل المعادلة (E).

2- أ- تأكد أن $z_1=1+i$ جدر للمعادلة (F) ثم حدد الجذرين الآخرين z_2 و z_3 للمعادلة (F) في شكلهما الجبري.

ب- حدد جذور المعادلة (F) في شكلها المثلثي.

3- حدد مجموعة النقط $M(z)$ حيث $\arg\left(\dfrac{z-z_2}{z-z_3}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}$

تمرين 30

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^3=1$ و أكتب جدورها في شكلها المثلثي ثم الجبري.

2- نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E)\quad z^3=2-11i$

أ- تأكد أن $z_0=2-i$ حل للمعادلة (E).

ب- استنتج حلول المعادلة (E) بوضع $z=tz_0$ حيث t عدد عقدي.

تمرين 31

1- بين أن $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right|=1\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}\qquad \forall z\in\mathbb{C}-\{-i\}$

2- استنتج أن حلول المعادلة $\dfrac{(z-i)^n}{(z+i)^n}=e^{i\theta}$ كلها حقيقية حيث $\theta\in\mathbb{R}\qquad n\in\mathbb{N}^*$

3- نضع $\theta=\dfrac{\pi}{4}\ ;\ n=2$

أ-حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ب- استنتج حلول المعادلة $\dfrac{(z-i)^2}{(z+i)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

تمرين 32

نعتبر المعادلة (E) التالية: $z\in\mathbb{C}\quad z^2\cos^2 t-4z\cos t+5-\cos^2 t=0$:(E) حيث $t\in\left]\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

1- حل المعادلة (E)

2- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$

M_1 و M_2 هما صورتا حلي المعادلة (E) في المستوى العقدي

حدد مجموعة النقط M_1 و M_2 عندما يتغير t في $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ و أنشئها في المعلم $(O;\vec{u};\vec{v})$

تمرين 33

في المستوى (P) العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$،

ليكن f التطبيق من $\mathbb{C}$ نحو $\mathbb{C}$ المعرف بـ

$$\begin{cases} f(z)=\dfrac{2z(z+\bar{z})}{(z-\bar{z})^2} & ; \quad z\in\mathbb{C}-\mathbb{R} \\ f(z)=0 & ; \quad z\in\mathbb{R} \end{cases}$$

و ليكن F التطبيق في المستوى (P) الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بنقطة $M'(f(z))$

1- أثبت أن النقط O و M و M' مستقيمية

2- بين أن مجموعة النقط الصامدة بالتطبيق هي الشلجم (Γ) الذي معادلته $y^2=-x$

3- نضع $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ حيث $r\in\mathbb{R}_+^*$ و $\theta\in]-\pi;\pi[-\left\{-\frac{\pi}{2};0;\frac{\pi}{2}\right\}$

أ- حدد، حسب قيم θ معيار و عمدة العدد $f(z)$

ب- أكتب بدلالة θ ، الصيغة الجبرية للعدد $f(z)$

ج- بين أن صورة المستوى (P) بالتطبيق F هو الشلجم (Γ)

4- أعط طريقة لانشاء صورة M بالتطبيق F

تمرين 34

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$. لتكن $A(-2+3i)$ و $B(1-3i)$ نقطتين.

نعتبر $M(z)$ حيث $z\neq-2+3i$ نضع $z'=\dfrac{z-1+3i}{z+2-3i}$

1- أ- حدد علاقة بين عمدة z' و الزاوية الموجهة $\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right)$

ب- حدد و أنشئ المجموعتين

$$(E_1)=\left\{M(z)/\arg(z')\equiv\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]\right\}$$

$$(E_2)=\{M(z)/|z'|=2\}$$

2- حدد لحق النقطة المشتركة K للمجموعتين E_1 و E_2