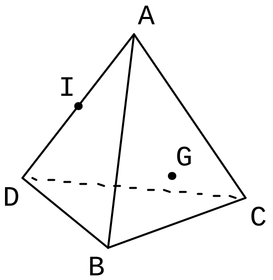
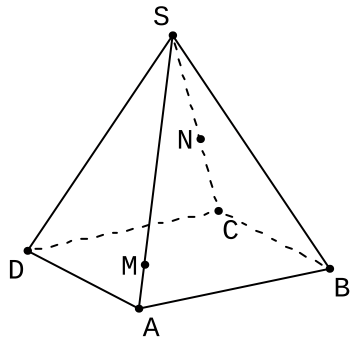
Exercice 1

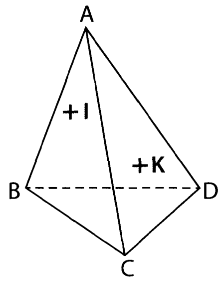
ABCD est un tétraèdre. I est le milieu de l'arête [AD], G un point de la face ABC distinct des sommets et tel que la droite (IG) ne soit pas parallèle au plan (BCD).
On note N l'intersection de la droite (IG) et du plan (BCD).
Construisez le point N en justifiant les différentes étapes de la construction.



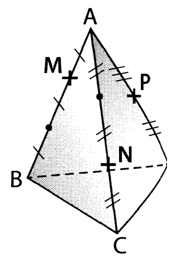
Exercice 2
SABCD est une pyramide de sommet S, M est un point de [AS] et N un point de [CS] tels que (MN) n'est pas parallèle au plan (ABC).
Justifiez les étapes de la construction du point E intersection de (MN) et de (ABC). Construisez ce point.



Exercice 3
Dans le tétraèdre ABCD, I et K sont des points des faces ABC et ACD tels que la droite (IK) n'est pas parallèle au plan (BCD).
1. Construisez le point d'intersection L de (IK) et de (BCD).
2. Construisez le point d'intersection J de (BD) et de (AIK).

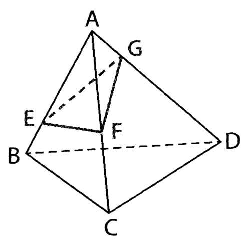


Exercice 4
ABCD est un tétraèdre, P est le milieu de [AD], M et N sont les points de [AB] et [AC] tels que 3 AM = AB et 3 CN = CA.
Les droites (MN), (MP) et (NP) coupent le plan (BCD) respectivement en I, J, K.
Placez ces points. Pourquoi sont-ils alignés ?



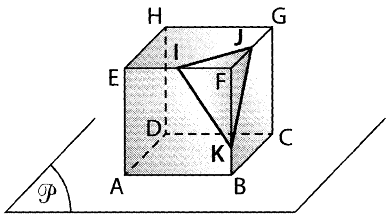
Exercice 5
ABCDEFGH est un cube, M est le milieu de l'arête [EA].
1. Construisez le point K, intersection de la droite (HM) et du plan (ABC).
2. On trace par M la droite *d* parallèle à (HB) Construisez le point L, intersection de la droite *d* et du plan (ABC).

Exercice 6
ABCD est un tétraèdre.
E, F, G sont des points des arêtes [AB], [AC] et [AD] tels que les droites (EF), (FG) et (EG) ne sont pas parallèles au plan (BCD).
1. Construisez la droite Δ, intersection des plans (EGF) et (BCD).



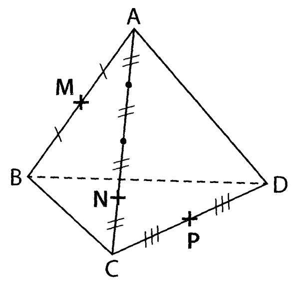
2. Démontrez que les droites Δ, (BC) et (EF) sont concourantes.

Exercice 7
On pose un cube ABCDEFGH sur un plan P.
I et J sont les milieux respectifs de [EF] et [FG], et

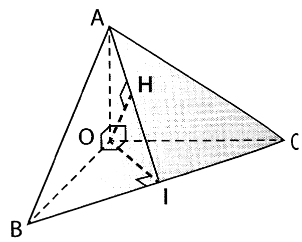


K est le point de [BF] tel que 4 BK = BF. Construisez la droite Δ, intersection des plans (IJK) et P.

Exercice 8
ABCD est un tétraèdre.
M et P sont les milieux respectifs des arêtes [AB] et [CD], N est le point de l'arête [AC] tel que 4 AN = 3 AC.
Tracez les intersections du plan (MNP) avec les faces du tétraèdre.

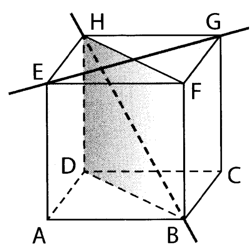


Exercice 9
OABC est un tétraèdre trirectangle (les triangles AOB, AOC et BOC sont rectangles en O).
1 est le projeté orthogonal de O sur (BC) et H celui de O sur (AI).



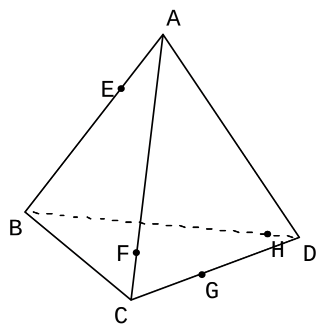
1. Démontrez que (AO) est perpendiculaire au plan (OBC).
Démontrez que (BC) est perpendiculaire au plan (AOI), en déduire que (AI) est une hauteur du triangle ABC.
2. Démontrez que (OH) est perpendiculaire au plan (ABC).

Exercice 10
ABCDEFGH est un cube.
1. Démontrer que la droite (EG) est perpendiculaire au plan (BDH).
2. En déduire que les droites (EG) et (HB) sont orthogonales.



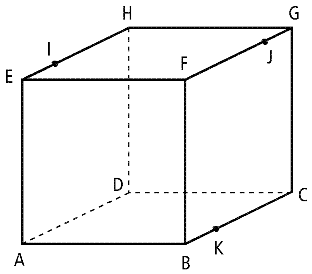
Exercice 11
ABCDEFGH est cube.
Démontrez que la droite (DG) est perpendiculaire au plan (BEH).

Exercice 12
Dans le tétraèdre ABCD ci-contre, E, F et G sont des points respectivement situés sur les côtés [AB], [AC] et [CD] .
On appelle (P) le plan qui les contient.
Déterminer l'intersection de (P) avec chacune des faces du tétraèdre.



Exercice 13

On se propose dans cet exercice de déterminer l'intersection du plan (IJK) avec chacune des faces du cube de deux façons.



On appellera (π) ce plan (IJK).

1. a. Déterminer l'intersection L du plan (π) et de la droite (EF).

b. Déterminer l'intersection M du plan (π) et de la droite (BF).

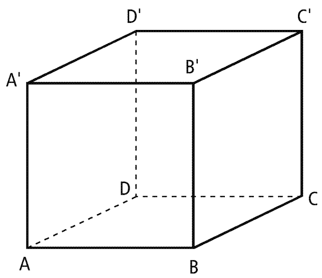
Soit R l'intersection des droites (LM) et (AE) et S l'intersection des droites (LM) et (AB)

c. En déduire l'intersection du plan (π) et de la face (ABFE).

2. Terminer la construction.

Exercice 14

On considère le cube ABCDA′B′C′D′ ci-contre.

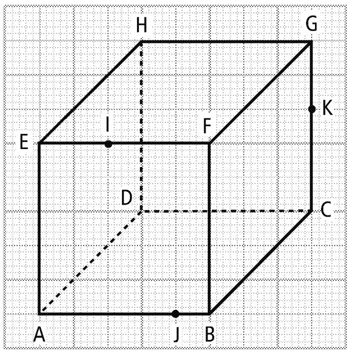


Placer respectivement sur les arêtes [A′D′], [AA′] et [AB] les points I, J et K définis par : A'I = $\frac{1}{3}$ A'D, A'J = $\frac{1}{3}$ AA' ;

K est le milieu de [AB].

1. Montrer que les droites (IJ) et (AD) sont parallèles.
2. Construire le point d'intersection E de la droite (JK) et de la droite (A'B') en déduire l'intersection des plans (IJK) et (A′B′C′).
3. Achever la construction du polygone représentant la partie du plan limitée par les faces du cube

Exercice 15

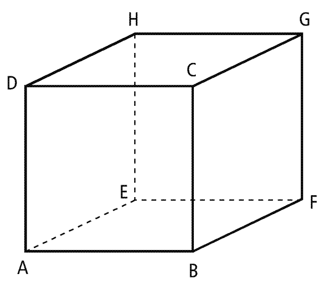


1. Déterminer le point d'intersection de la droite (IJ) avec le plan (BCG).

2. Tracer la droite d'intersection du plan (IJK) avec le plan (BCG).
3. Achever la construction du polygone représentant la partie du plan (IJK) limitée par les faces du cube.

Exercice 16

Dans le cube ABCDEFGH ci-contre, placer le point M sur [FG], de telle sorte que FM = $\frac{3}{4}$FG et le point Z milieu de l'arête [AD]



On appelle (P) le plan contenant le point Z et parallèle au plan (BME).

Déterminer les droites d'intersection de ce plan (P) avec les plans (ABD) et (ADE).

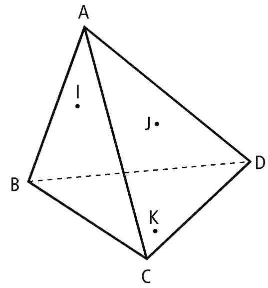
Achever la construction du polygone représentant la partie du plan (P) limitée par les faces du cube.

(On pourra par exemple utiliser le théorème concernant l'intersection de deux plans parallèles par un troisième.)

Exercice 17

Sur le tétraèdre ABCD ci-contre on a placé des points I, J et K respectivement sur les faces ABC, ACD et BCD.

On se propose de déterminer l'intersection du plan avec chacune des faces de ABCD dans chacun des cas suivants :



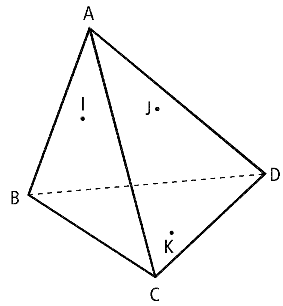
1^er^ cas : La droite (IJ) n'est pas parallèle au plan (BCD)

a. Déterminer l'intersection des plans (AIJ) et (BCD).

b. En déduire la droite d'intersection des plans (IJK) et (BCD). Cette droite coupe en E et en F.

c. Achever la construction de la section de ABCD par le plan (IJK)

d. Montrer que les droites (EI), (AC) et (FJ) sont concourantes.



2^eme^ cas : La droite (IJ) est parallèle au plan(BCD)

a. Déterminer l'intersection des plans (AIJ) et (BCD).

b. Pourquoi cette droite est-elle parallèle à (IJ) ?

c. On appelle (Δ) la droite d'intersection des plans (IJK) et (BCD).

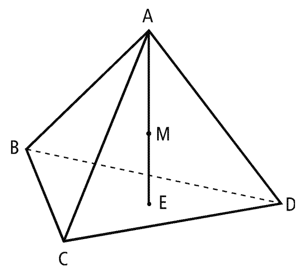
Expliquer pourquoi les droites (IJ) et (Δ) sont parallèles.

d. Achever alors la construction de la section du tétraèdre ABCD par le plan (IJK).

Exercice 18

E est un point du plan (BCD) et M est un point du segment [AE].

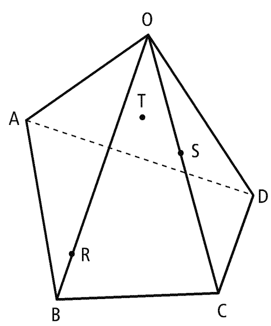
Construire la section du tétraèdre par le plan (π) passant par M et parallèle au plan (BCD).



Exercice 19

La pyramide ci-contre a pour base le quadrilatère ABCD et pour sommet O.

Les points R et S sont respectivement situés sur les arêtes [OB] et [OC] ; T est un point de la face OAD.



1ci encore on se propose de déterminer l'intersection du plan (RST) avec les faces de la pyramide.

Pour cela :

a. Construire la droite (Δ) droite d'intersection des plans (OBC) et (OAD).

b. En déduire le point d'intersection I de la droite (RS) avec le plan (OAD).

c. Construire ensuite la droite d'intersection des plans (RST) et (OAD).

d. Achever la construction demandée.

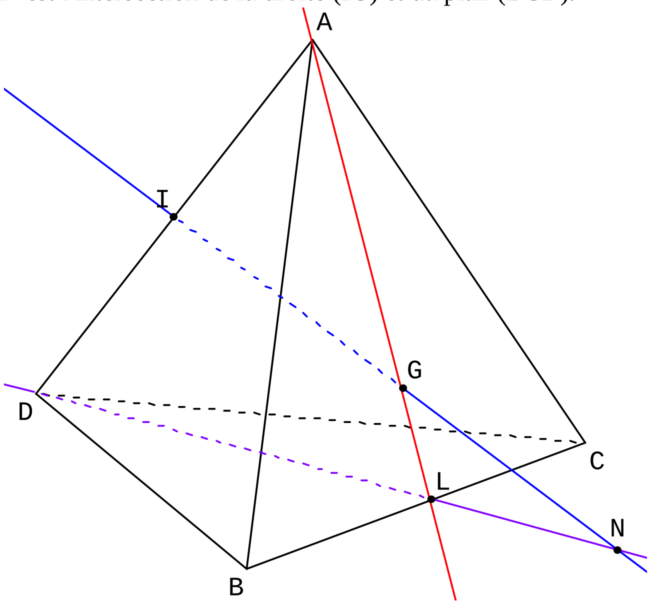
CORRECTION

Exercice 1

1. Dans le plan (ABC), la droite (AG) coupe la droite (BC) en L

Le point L est un point des plans (AIG) et (BCD) donc les droites (IG) et (DL) sont coplanaires, la droite (IG) n’est pas parallèle au plan (BCD) donc les droites (IG) et (DL) sont sécantes. Soit N leur point d’intersection.

N est l'intersection de la droite (IG) et du plan (BCD).

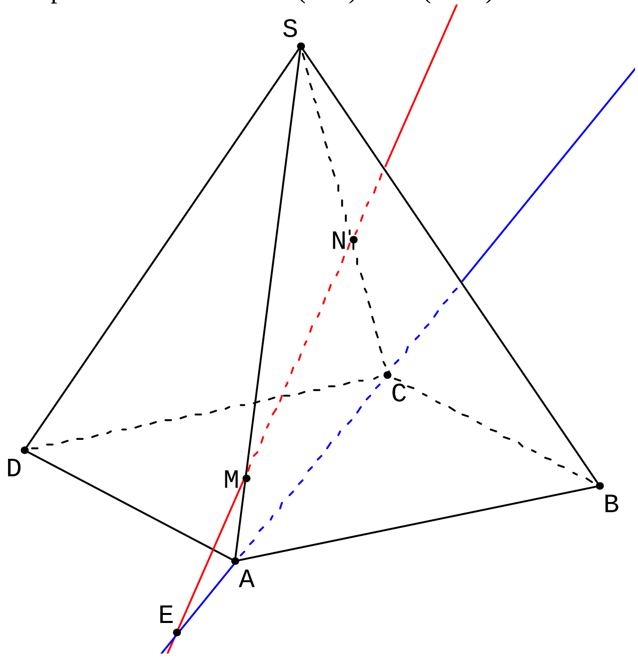


Exercice 2

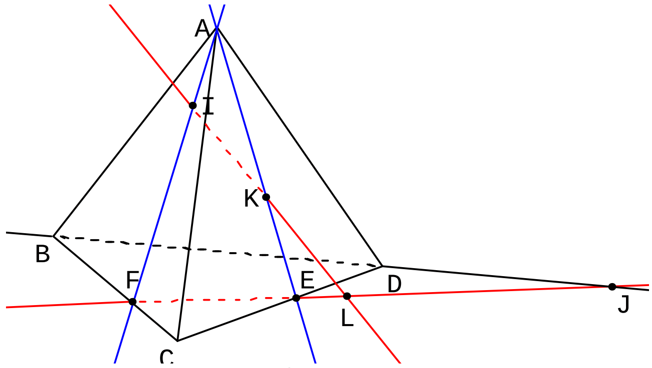
M est un point de [AS] et N un point de [CS] donc la droite (MN) est contenue dans le plan (ACS)

(MN) n'est pas parallèle au plan (ABC) donc (MN) et (AC) sont sécantes en E.

E est un point de la droite (MN) et du plan (ABC) donc E est le point d’intersection de (MN) et de (ABC).



Exercice 3



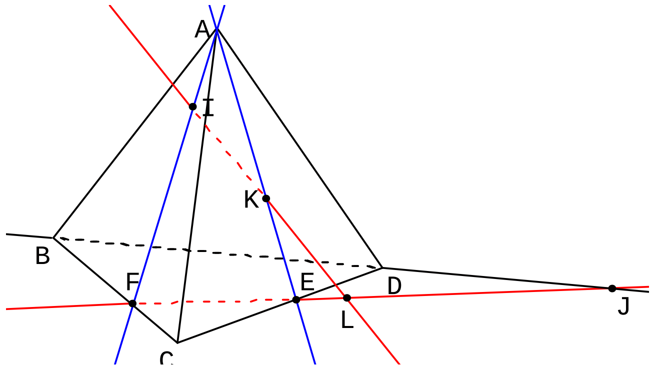
I et K sont des points des faces ABC et ACD donc la droite (AI) coupe la droite (BC) en F et la droite (AK) coupe la droite (CD) en E

E et F sont deux points du plan (AIK) et du plan (BCD) donc l’intersection des plans (AIK) et (BCD) est la droite (EF).

La droite (IK) n'est pas parallèle au plan (BCD) donc elle coupe (EF) en un point L.

La droite (EF) coupe la droite (BD) en un point J, J appartient à (EF) donc au plan (AIK) donc J est le point d'intersection de (BD) et de (AIK).

Exercice 4



Construction des points I, J, K

Les droites (BC) et (MN) sont coplanaires et non parallèles donc sont sécantes, soit I leur point d’intersection.

I appartient à (BC) donc est un point du plan (BCD) et à (MN) donc I est le point d’intersection de la droite (MN) et du plan (BCD)

Même raisonnement pour J en prenant les droites (MP) et (CD)

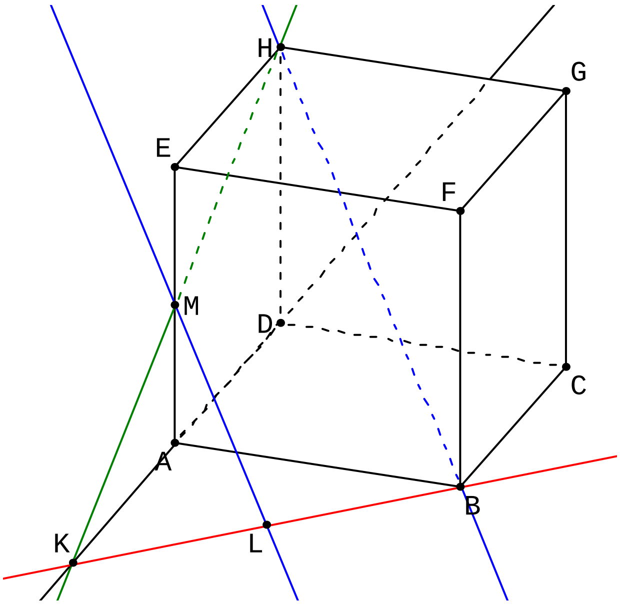
Même raisonnement pour K en prenant les droites (NP) et (BD).

Alignement des points I, J, K

Le plan (MNP) n’est pas parallèle au plan (BCD) donc leur intersection est une droite.

I, J, K appartiennent aux plans (MNP) et (BCD) donc à leur droite d’intersection donc I, J, K sont alignés.

Exercice 5



1. Les droites (AD) et (HM) sont coplanaires et non parallèles donc sont sécantes, soit K leur point d'intersection.

K appartient à (AD) donc est un point du plan (ABC) et à (HM) donc K est le point d'intersection de la droite (HM) et du plan (ABC).

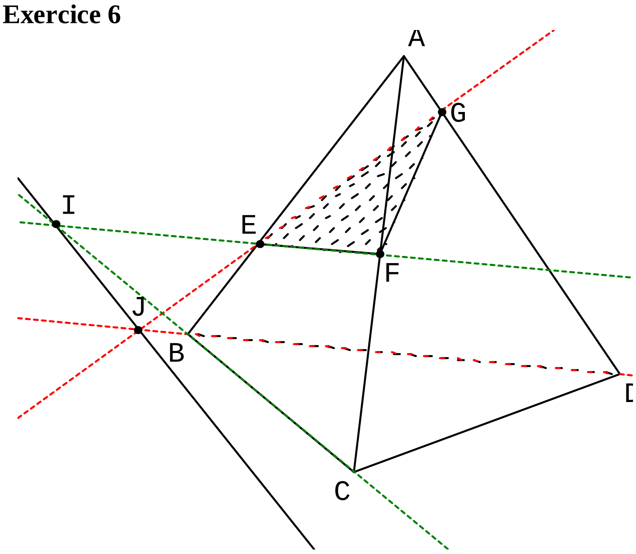
2. On trace par M la droite *d* parallèle à (HB)

Les droites *d* et (HB) sont coplanaires, soit (π) ce plan, K appartient à (HM) donc à (π)

(BK) et *d* sont deux droites non parallèles de (π) donc sont sécantes en L

Le point L appartient à *d* et à (BK) donc au plan (ABC) donc L est le point d'intersection de la droite *d* et du plan (ABC).

Exercice 6



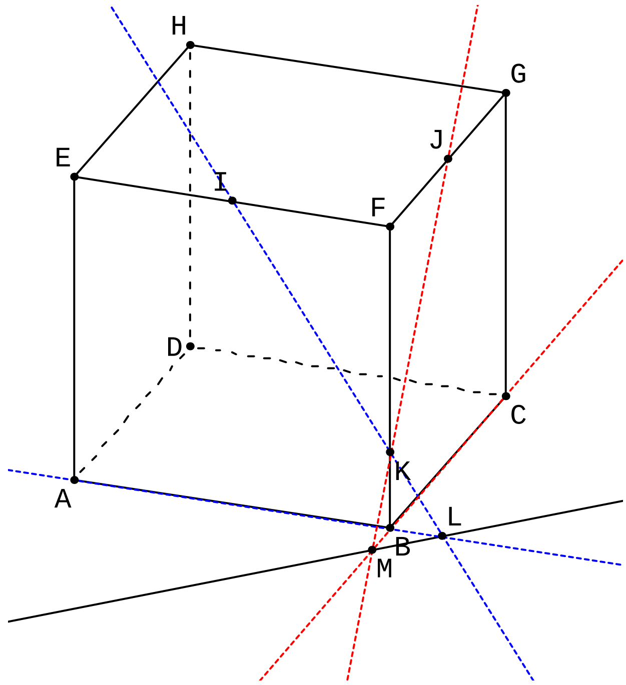
Dans le plan (ABD), les droites (EF) et (BC) sont sécantes en I

Dans le plan (ABD), les droites (EG) et (BD) sont sécantes en J

I et J sont deux points distincts des plans (EGF) et (BCD) donc la droite (IJ) est l'intersection (EGF) et (BCD).

I appartient à (EF), à (Δ) et à (BC), ces droites sont distinctes donc les droites Δ, (BC) et (EF) sont concourantes.

Exercice 7



Les droites (AB) et (IK) sont coplanaires et non parallèles donc sont sécantes, soit L leur point d'intersection.

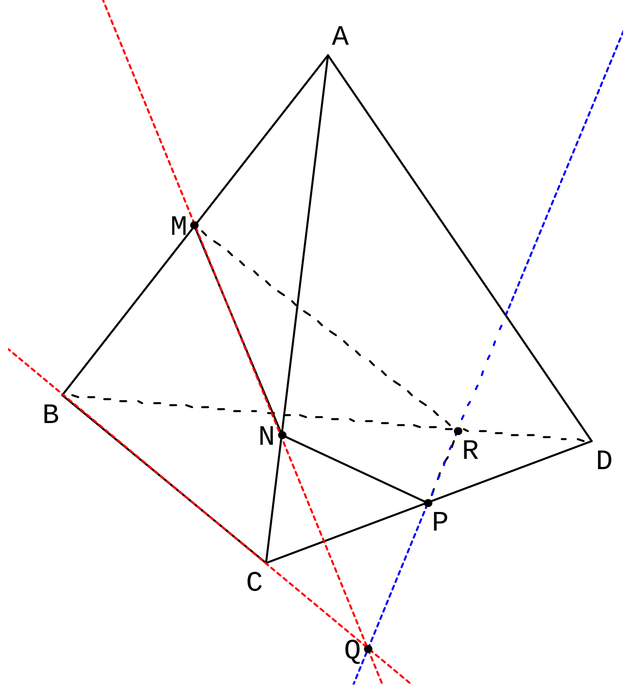
L appartient à (AB) donc est un point du plan (ABC) et du plan (IJK) donc L est un point d'intersection des plans (ABC) et (IJK).

Les droites (BC) et (JK) sont coplanaires et non parallèles donc sont sécantes, soit M leur point d'intersection.

M appartient à (BC) donc est un point du plan (ABC) et du plan (IJK) donc M est un point d'intersection des plans (ABC) et (IJK)

Les plans (ABC) et (IJK) ont deux points d'intersection distincts L et M donc leur intersection est la droite (LM).

Exercice 8



Les droites (MN) et (BC) sont coplanaires et non parallèles, soit Q leur point d'intersection.

Q appartient à (BC) donc au plan (BCD)

Les droites (PQ) et (BD) sont coplanaires et non parallèles, soit R leur point d'intersection.

R appartient à (BD) donc au plan (BCD)

Le quadrilatère MNPR est l'intersection du tétraèdre et du plan (MNP).

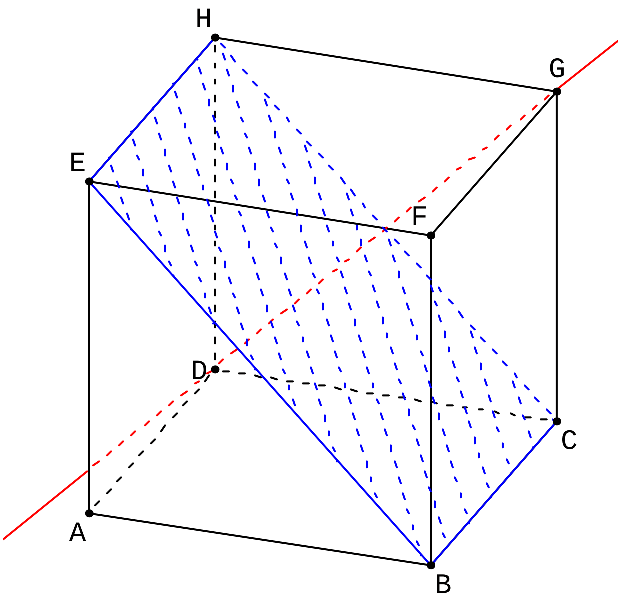
Exercice 9

1. (AO) est perpendiculaire à (OB) et à (OC).
(OB) et (OC) sont deux droites sécantes donc (AO) est perpendiculaire au plan (OBC).
(AO) est perpendiculaire au plan (OBC) donc en particulier, (AO) est orthogonale à (BC).
1 est le projeté orthogonal de O sur (BC) donc (OI) est perpendiculaire à (BC)
(BC) est orthogonale à deux droites sécantes (AO) et (OI) donc (BC) est perpendiculaire au plan (AOI).
(BC) est perpendiculaire au plan (AOI), donc à toute droite de ce plan en particulier à (BC) est perpendiculaire à (AI) donc (AI) est une hauteur du triangle ABC.
2. (BC) est perpendiculaire au plan (AOI), donc à toute droite de ce plan en particulier à (OH).
(OH) est perpendiculaire à (AI)
(OH) est orthogonale à deux droites sécantes (AI) et (BC) donc (OH) est perpendiculaire au plan (ABC)

Exercice 10

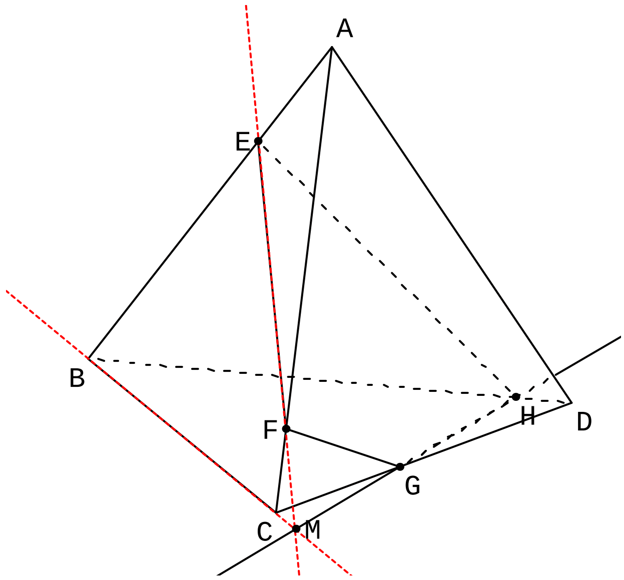
1. Dans le carré EFGH, les diagonales (HF) et (EG) sont perpendiculaires.
La droite (DH) est perpendiculaire au plan (EFG) donc à toute droite de ce plan, en particulier à la droite (EG)
La droite (EG) est perpendiculaire à deux droites sécantes (DH) et (HF) donc est perpendiculaire au plan (BDH).
2. La droite (EG) est perpendiculaire au plan (BDH) donc à toute droite de ce plan, en particulier à la droite (HB).

Exercice 11



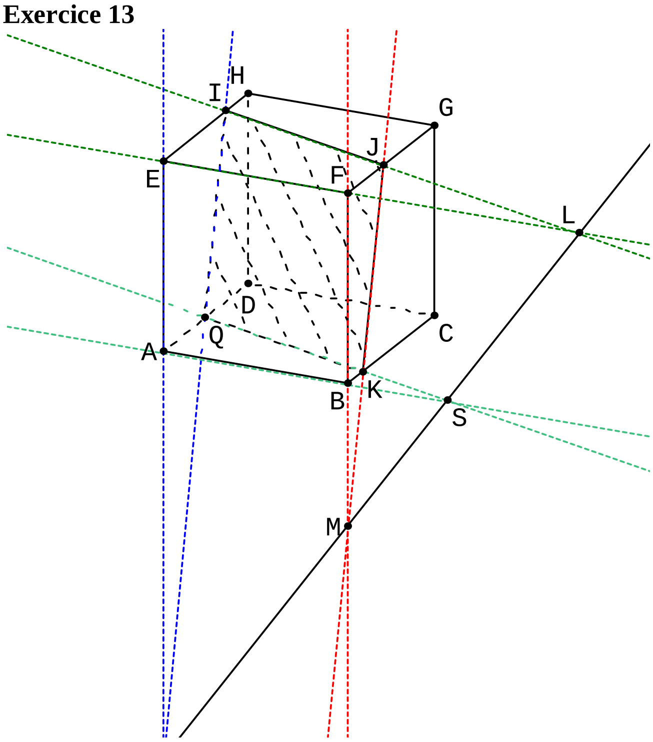
La droite (DG) est la diagonale du carré CDHG donc est perpendiculaire à la diagonale (CH).
La droite (EH) est perpendiculaire au plan (CGH) donc à toute droite de ce plan, en particulier à la droite (DG).
La droite (DG) est perpendiculaire à deux droites sécantes (EH) et (CH) donc est perpendiculaire au plan (BEH).

Exercice 12



Les droites (EF) et (BC) sont coplanaires et non parallèles, soit M leur point d'intersection.
M appartient à (BC) donc au plan (BCD)
Les droites (MG) et (BD) sont coplanaires et non parallèles, soit H leur point d'intersection.
H appartient à (BD) donc au plan (BCD)
Le quadrilatère EFGH est l'intersection du tétraèdre et du plan (MNP).

Exercice 13



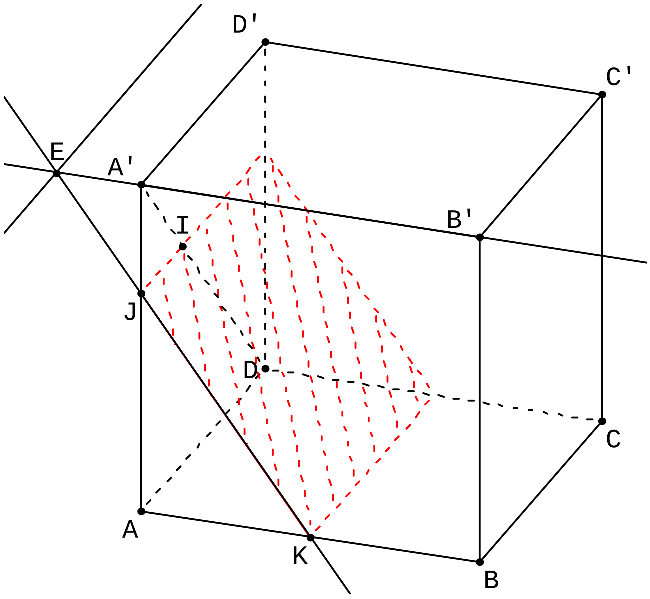
1. a. La droite (IJ) appartient au plan (EFG) et n'est pas parallèle à (EF) soit L le point d'intersection des droites (IJ) et (EF).
b. La droite (JK) appartient au plan (BCG) et n'est pas parallèle à (BF) soit M le point d'intersection des droites (JK) et (BF).
Les plans (IJK) et (BEF) ne sont pas parallèles donc sont sécants, L et M appartiennent à ces deux plans et sont distincts donc l'intersection des plans (IJK) et (BEF) est la droite (LM)
c. (SK) coupe (AD) en Q donc l'intersection du plan (π) et de la face (ABFE) est le quadrilatère IJKQ

Exercice 14

1. $\overrightarrow{A'I} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A'D}$ et $\overrightarrow{A'J} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A'A}$ donc

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{A'J} - \overrightarrow{A'I} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A'A} - \frac{1}{3}\overrightarrow{A'D}$

soit $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ donc les droites (IJ) et (AD) sont parallèles



2. Les droites (JK) et (A'B') sont sécantes en E, les droites (IJ) et (AD) sont parallèles donc les droites (IJ) et (A'D') sont parallèles

Les deux plans sécants (IJK) et (A'B'C') contiennent deux droites parallèles (IJ) et (A'D'), donc leur intersection est une droite parallèle aux deux premières. (théorème du toit)

Le plan (IJK) coupe le plan (A'B'C') suivant une droite parallèle à (A'D') en E

Le plan (IJK) coupe le plan (ABC) suivant une droite parallèle à (AD) en K

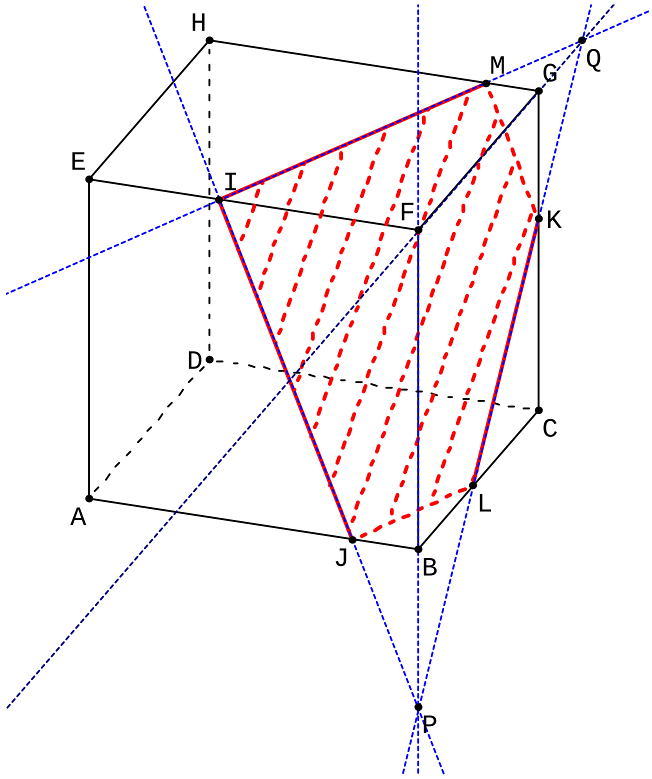
3. Soit L le point d'intersection de cette droite et de [CD]

Le plan (IJK) coupe le plan (ADA') suivant la droite (IJ)

La droite (IJ) coupe [DD'] en M

Le quadrilatère JKLM est la partie du plan (IJK) limitée par les faces du cube.

Exercice 15



Le point F appartient au plan (BCG).

Les droites (IJ)° et (BF°) sont coplanaires, non parallèles et sécantes en P donc P est le point d'intersection de la droite (IJ) avec le plan (BCG).

Les droites (KP)° et (BC°) sont coplanaires, non parallèles et sécantes en L.

L et J sont deux points des plans (BCG) et (IJK) donc la droite (JL) est la droite d'intersection du plan (IJK) avec le plan (BCG).

La droite (LK) appartient au plan (IJK) et au plan (BCG), elle coupe la droite (FG) en Q.

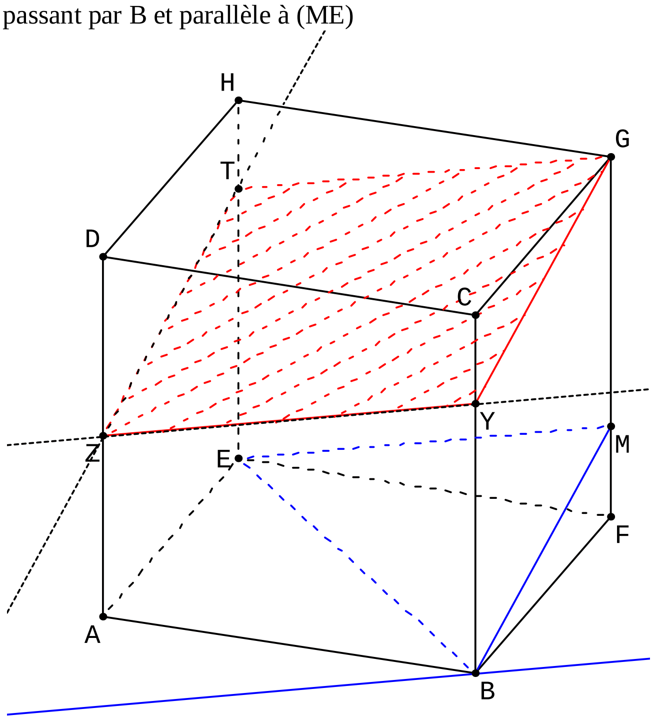
La droite (IQ) appartient au plan (IJK) et au plan (EFG), elle coupe la droite (GH) en M.

Le polygone représentant la partie du plan (IJK) limitée par les faces du cube est le polygone IJLKM.

Exercice 16

Les plans (BME) et (EFG) ont pour intersection la droite (ME).

Les plans (ABD) et (EFG) sont parallèles donc l’intersection des plans (ABD) et (BME) est la droite (D) passant par B et parallèle à (ME)



(P) est parallèle au plan (BME) donc l’intersection des plans (ABD) et (P) est la droite (Δ) passant par Z et parallèle à (D).

Soit Y le point intersection des droites (Δ) et (BC).

Les plans (BME) et (P) sont parallèles, l’intersection des plans (BME) et (BCF) est la droite (BM) donc l’intersection du plan (P) et du plan (BCF) est la droite (Δ’) parallèle en Y à (BM).

Les plans (ADE) et (BCG) sont parallèles, l’intersection des plans (BCG) et (P) est la droite (GY) donc l’intersection du plan (P) et du plan (ADE) est la droite (Δ") parallèle en Z à (GY).

Soit T le point intersection des droites (Δ") et (EH).

Le polygone représentant la partie du plan (P) limitée par les faces du cube est le polygone (TGYZ).

Exercice 17

1^er^ cas : La droite (IJ) n’est pas parallèle au plan (BCD)

a. Les points A, B, C, I sont coplanaires, les droites (AI), et (BC) sont sécantes en M.

Les points A, C, D, J sont coplanaires, les droites (AJ), et (CD) sont sécantes en N.

Les points M et N appartiennent aux plans (BCD) et (AIJ) donc la droite (MN) est l’intersection des plans (AIJ) et (BCD).

b. Les droites (MN) et (IJ) sont deux droites sécantes du plan (IJK) en L.

L et K sont deux points des plans (IJK) et (BCD) donc (KL) est la droite d’intersection des plans (IJK) et (BCD).

c. La droite (EI) est une droite des plans (ABC) et (IJK) donc est l’intersection de ces deux plans.

La droite (FJ) est une droite des plans (ACD) et (IJK) donc est l’intersection de ces deux plans.

d. la droite (AC) coupe le plan (IJK) en un seul point G

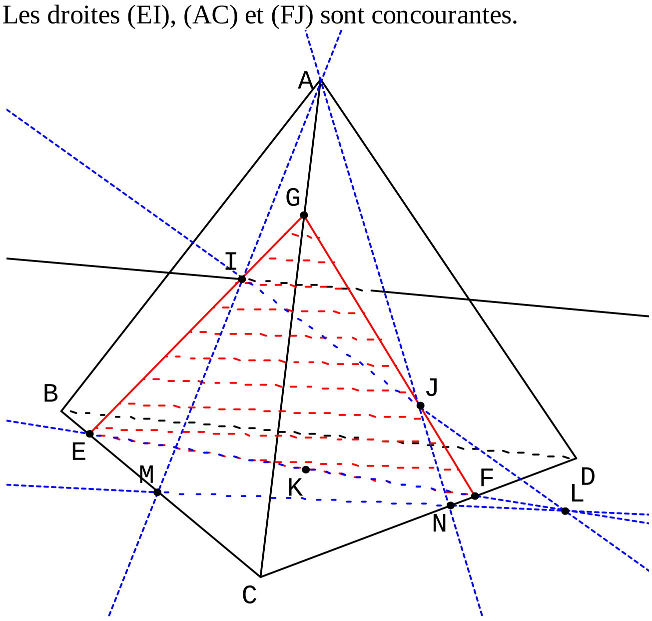
Les plans (IJK) et (ABC) sont sécants suivant (EI)

Les droites (EI) et (AC) sont sécantes en G

Les plans (IJK) et (ACD) sont sécants suivant (FJ)

Les droites (FJ) et (AC) sont sécantes, (FJ) est une droite du plan (IJK) donc le point d’intersection de (FJ) et (AC) est G

Les droites (EI), (AC) et (FJ) sont concourantes.



2^eme^ cas : La droite (IJ) est parallèle au plan(BCD)

a. Les points A, B, C, I sont coplanaires, les droites (AI), et (BC) sont sécantes en M.

Les points A, C, D, J sont coplanaires, les droites (AJ), et (CD) sont sécantes en N.

Les points M et N appartiennent aux plans (BCD) et (AIJ) donc la droite (MN) est l’intersection des plans (AIJ) et (BCD).

b. La droite (IJ) est parallèle au plan (BCD) donc l’intersection des plans (AIJ) et (BCD) est une droite parallèle à (IJ).

c. La droite (IJ) est parallèle au plan (BCD) donc l’intersection des plans (IJK) et (BCD) est une droite parallèle à (IJ), K appartient aux plans (BCD) et (IJK) donc (Δ) passe par K

La droite (EI) est une droite des plans (ABC) et (IJK) donc est l’intersection de ces deux plans.

La droite (FJ) est une droite des plans (ACD) et (IJK) donc est l’intersection de ces deux plans.

d. la droite (AC) coupe le plan (IJK) en un seul point G

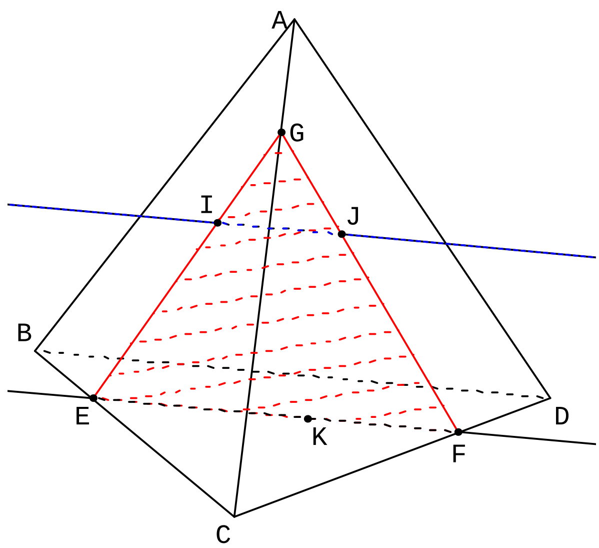
Les plans (IJK) et (ABC) sont sécants suivant (EI)

Les droites (EI) et (AC) sont sécantes en G

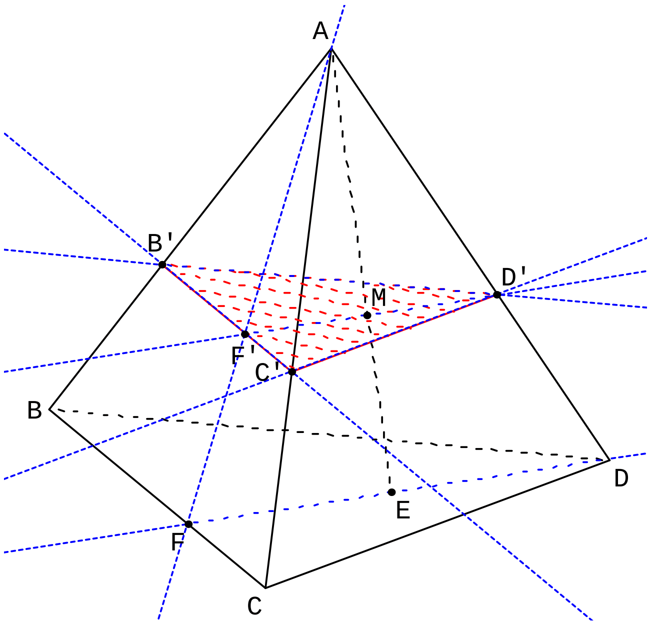
Les plans (IJK) et (ACD) sont sécants suivant (FJ)

Les droites (FJ) et (AC) sont sécantes, (FJ) est une droite du plan (IJK) donc le point d’intersection de (FJ) et (AC) est G

Les droites (EI), (AC) et (FJ) sont concourantes.



Exercice 18



Les droites (DE) et (BC) sont sécantes en F

Le plan (π) est parallèle en M au plan (BCD) donc l'intersection des plans (BCD) et (π) par le plan (AMD) sont deux droites parallèles.

Construisons la droite parallèle en M à (DE), cette droite coupe (AD) en D' et (AF) en F'

Le plan (π) est parallèle en M au plan (BCD) donc l'intersection des plans (BCD) et (π) par le plan (ABC) sont (BC) et une droite parallèle en F' à (BC).

Cette droite coupe (AC) en C' et (AB) en B'

Le triangle B' C' D' est l'intersection du plan (π) et du tétraèdre.

Exercice 19

La pyramide ci-contre a pour base le quadrilatère ABCD et pour sommet O.

Les points R et S sont respectivement situés sur les arêtes [OB] et [OC] ; T est un point de la face OAD.

1ci encore on se propose de déterminer l'intersection du plan (RST) avec les faces de la pyramide.

CORRECTION

a. Les droites (BC) et (AD) ne sont pas parallèles, soit L leur point d'intersection.

O et L sont deux points distincts des plans distincts (OBC) et (OAD) donc l'intersection des plans (OBC) et (OAD) est la droite (Δ).

b. Les droites (RS) et (OL) sont deux droites du plan (OBC), ces deux droites sont sécantes en I

(OL) est une droite du plan (OAD) donc I est le point d'intersection de la droite (RS) avec le plan (OAD).

c. T est un point des plans (RST) et (OAD), I est le point d'intersection de la droite (RS) avec le plan (OAD) donc I appartient à l'intersection des plans (RST) et (OAD).

Les plans (RST) et (OAD) sont distincts ont deux points communs T et L donc la droite (TL) est l'intersection des plans (RST) et (OAD).

d. La droite (TL) coupe le segment [OA] en A' et le segment [OD] en D' donc l'intersection du plan (RST) avec les faces de la pyramide est le quadrilatère RSD'A'.