

## *Calculs sur les complexes*

### *Interprétations géométriques*

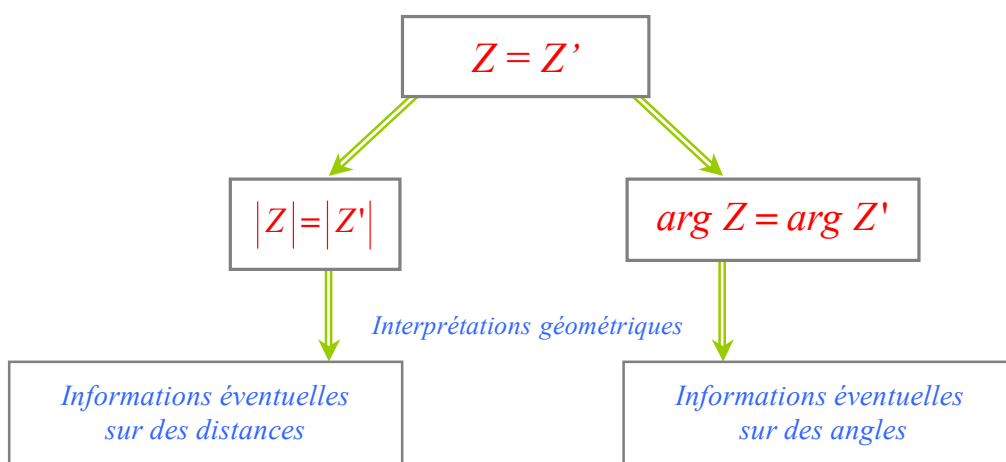
À partir d'égalités sur des nombres complexes, nous pourrions éventuellement calculer des distances ou des angles.

Propriété :

*Si deux complexes sont égaux,  
alors leurs modules sont égaux  
et leurs arguments sont égaux.*

Application :

Soit  $Z$  et  $Z'$  deux nombres complexes non nuls :



Rappels sur les interprétations géométriques classiques :

$$|z_B - z_A| = AB$$

$$\arg(z_B - z_A) = \arg z_{\overline{AB}} = \left( \vec{u} ; \overline{AB} \right)$$

$$\arg \left( \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right) = \left( \overline{AB} ; \overline{CD} \right)$$

Exemple :

Soit les points  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  d'affixes respectives  $z_1 = 3 + i$ ,  $z_2 = 2i$ , et  $z_3 = 2 - 2i$ .

Calculer  $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$  et en déduire la nature du triangle  $M_1 M_2 M_3$ .

$$\begin{aligned}\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} &= \frac{(2 - 2i) - (3 + i)}{(2i) - (3 + i)} = \frac{-1 - 3i}{-3 + i} \\ &= \frac{(-1 - 3i)(-3 - i)}{(-3 + i)(-3 - i)} \\ &= \frac{3 + i + 9i - 3}{9 + 3i - 3i + 1} \\ &= \frac{10i}{10} = i\end{aligned}$$

Utilisation de la quantité conjuguée du dénominateur

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = i \quad \text{donc} \quad \left| \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right| = |i|$$

$$\left| \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right| = |i| \quad \text{d'après propriété sur les modules}$$

$$\left| \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right| = 1 \quad \text{car} \quad |i| = 1$$

$$\frac{M_1 M_3}{M_1 M_2} = 1$$

Interprétation géométrique des modules

$$M_1 M_3 = M_1 M_2 \quad (1)$$

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = i \quad \text{donc} \quad \arg \left( \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right) = \arg(i) \quad [2\pi]$$

$$\left( \overrightarrow{M_1 M_2} ; \overrightarrow{M_1 M_3} \right) = \arg(i) \quad [2\pi]$$

Interprétation géométrique de l'argument d'un quotient

$$\left( \overrightarrow{M_1 M_2} ; \overrightarrow{M_1 M_3} \right) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \quad (2)$$

Par conséquent, d'après (1) et (2), le triangle  $M_1 M_2 M_3$  est rectangle et isocèle en  $M_1$ .