Calculs sur les complexes
Interprétations géométriques

À partir d'égalités sur des nombres complexes, nous pourrons éventuellement calculer des distances ou des angles.

Propriété :

> *Si* deux complexes sont égaux,
> *alors* leurs modules sont égaux
> et leurs arguments sont égaux.

Application :

Soit Z et Z' deux nombres complexes non nuls :

$$\begin{array}{ccc} & Z = Z' & \\ \swarrow & & \searrow \\ |Z| = |Z'| & & \arg Z = \arg Z' \\ \Downarrow & \textit{Interprétations géométriques} & \Downarrow \\ \text{Informations éventuelles sur des distances} & & \text{Informations éventuelles sur des angles} \end{array}$$

Rappels sur les interprétations géométriques classiques :

$$|z_B - z_A| = AB$$

$$\arg\left(z_B - z_A\right) = \arg z_{\overrightarrow{AB}} = \left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right)$$

$$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD}\right)$$

Exemple :

Soit les points M_1 , M_2 et M_3 d'affixes respectives $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 2i$, *et* $z_3 = 2 - 2i$.

Calculer $\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ et en déduire la nature du triangle $M_1 M_2 M_3$.

$$\begin{aligned}\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} &= \frac{(2-2i)-(3+i)}{(2i)-(3+i)} = \frac{-1-3i}{-3+i} \\ &= \frac{(-1-3i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)} \\ &= \frac{3+i+9i-3}{9+3i-3i+1} \\ &= \frac{10i}{10} = i\end{aligned}$$

Utilisation de la quantité conjuguée du dénominateur

$\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = i$ donc $\left|\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right| = |i|$

$\dfrac{|z_3 - z_1|}{|z_2 - z_1|} = |i|$ d'après propriété sur les modules

$\dfrac{|z_3 - z_1|}{|z_2 - z_1|} = 1$ car $|i| = 1$

$\dfrac{M_1M_3}{M_1M_2} = 1$

Interprétation géométrique des modules

$M_1M_3 = M_1M_2$ (1)

$\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = i$ donc $\arg\left(\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) = \arg(i)\quad [2\pi]$

$\left(\overrightarrow{M_1M_2}\ ;\ \overrightarrow{M_1M_3}\right) = \arg(i)\quad [2\pi]$

Interprétation géométrique de l'argument d'un quotient

$\left(\overrightarrow{M_1M_2}\ ;\ \overrightarrow{M_1M_3}\right) = \dfrac{\pi}{2}\quad [2\pi]$ (2)

Par conséquent, d'après (1) et (2), le triangle $M_1 M_2 M_3$ est rectangle et isocèle en M_1.