

Le produit scalaire - Exercices

A Démontrer que des droites sont perpendiculaires

a) ABCD est un carré, I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [BC].
Montrer que les droites (CI) et (DJ) sont perpendiculaires.

b) ABCD est un carré de côté a. M est un point de la diagonale [BD], P et Q sont les projetés orthogonaux de M sur (AB) et (AD).
Montrer que les droites (PQ) et (CM) sont orthogonales.
(il suffit de montrer que $\vec{PQ} \cdot \vec{CM} = 0$, on peut le faire directement ou en utilisant des coordonnées)

c) Soit ABC un triangle.
BAE et CAF sont deux triangles rectangles et isocèles en A situés à l'extérieur de ABC.
On note $AB = c$, $AC = b$ et $\widehat{BAC} = \alpha$.
Calculer $\vec{AE} \cdot \vec{AC}$ et $\vec{AB} \cdot \vec{AF}$ en fonction de b , c et α .
On appelle I le milieu de [BC]. En utilisant les résultats précédents, montrer que les droites (AI) et (EF) sont perpendiculaires.

d) On considère un triangle OAB isocèle et rectangle en O, un réel k positif non nul et les points E et F définis par $\vec{OE} = k \cdot \vec{OA}$ et $\vec{OF} = k \cdot \vec{OB}$.
On appelle I le milieu de [BE].
Démontrer que $\vec{OI} = \frac{1}{2} (\vec{OB} + \vec{OE})$, puis que les droites (OI) et (AF) sont perpendiculaires.

e) ABCD est un trapèze rectangle en A et B tel que $AB = 2$, $BC = 4$ et $AD = 1$.
Montrer que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires.

f) ABCD est un parallélogramme tel que $AD = a$ et $AB = 2a$ ($a > 0$).
On appelle I le milieu de [AB].
Montrer que les droites (DI) et (IC) sont perpendiculaires.
(on peut utiliser de nombreuses méthodes : produit scalaire, angles, coordonnées, configurations, ...)

B Calculer des angles

a) ABCD est un carré de côté a, I est le milieu de [DA]. On pose $\widehat{ACI} = \theta$.
Calculer $\vec{CA} \cdot \vec{CI}$ de deux façons, en déduire la valeur exacte de $\cos(\theta)$, puis une valeur approchée de θ à 1° près.

b) ABCD est un carré de côté a, I est le milieu de [DA] et J est le milieu de [DC]. On pose $\widehat{IBJ} = \theta$.
Calculer $\vec{BI} \cdot \vec{BJ}$ de deux façons, en déduire la valeur exacte de $\cos(\theta)$, puis une valeur approchée de θ à 1° près.

c) ABCD est un carré de côté a. I et J sont définis par $\vec{BI} = \frac{1}{2} \vec{BC}$ et $\vec{DJ} = \frac{1}{3} \vec{DC}$. En exprimant le produit scalaire $\vec{AI} \cdot \vec{AJ}$ de deux façons différentes, déterminer le cosinus de l'angle \widehat{IAJ} , puis sa mesure en radians.

C Calculer des longueurs

a) ABCD est un parallélogramme tel que $AB = 4$, $AD = 2$ et $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{3}$.

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ de deux façons, en déduire AC.

Utiliser une méthode similaire pour calculer BD.

(autre possibilité : calculer $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})^2$ et $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})^2$)

b) ABCD est un rectangle tel que $AB = a$ et $BC = b$, $a > b$.

On appelle H et K les projections orthogonales de A et C sur (DB).

Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$ en fonction de a et b , puis en fonction de HK et DB.

En déduire que $HK = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

D Divers

1. Cosinus de $\pi/12$

OABC est un carré de côté 1 tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{2}$.

OAE est le triangle équilatéral tel que E soit à l'intérieur de OABC.

On considère le repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$.

a) Calculer les coordonnées polaires et les coordonnées cartésiennes de B et E.

b) Calculer une mesure de $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE})$.

c) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OE}$ de deux façons. En déduire la valeur exacte de $\cos(\frac{\pi}{12})$.

2. Cosinus de $\pi/8$

ABD est un triangle isocèle et rectangle en A. On pose $AB = a$.

On considère le point C tel que $DC = a$ et $D \in [AC]$.

a) Calculer les longueurs des côtés et les mesures des angles du triangle ABC.

b) Calculer AB^2 en remarquant que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$. En déduire la valeur exacte de $\cos(\frac{\pi}{8})$.

3. Relation d'Euler et orthocentre

A, B et C sont 3 points.

Montrer que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. (c'est la relation d'Euler)

En déduire que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

4. Constante

On considère un cercle de centre O et de diamètre [AB]. E est un point fixe de [AB].

Une droite parallèle à (AB) coupe le cercle en M et N. Montrer que $EM^2 + EN^2$ est constant.

(Indication : montrer que $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$ est orthogonal à \overrightarrow{EO} , utiliser $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{ON}$)

5. Avec des coordonnées

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) . On considère les points A(2; -3), B(-2; 1) et C(3; 4).

a) Calculer AB, AC et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

En déduire $\cos(\widehat{BAC})$, puis une valeur approchée de \widehat{BAC} à 1° près.

b) Soit H le pied de la hauteur issue de C.

Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{AH} = k \overrightarrow{AB}$ en utilisant le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

En déduire les coordonnées de H.

c) Calculer l'aire de ABC.

5. Avec des coordonnées

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) . On considère les points $A(2; -3)$, $B(-2; 1)$ et $C(3; 4)$.

a) Calculer AB , AC et $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

En déduire $\cos(\widehat{BAC})$, puis une valeur approchée de \widehat{BAC} à 1° près.

b) Soit H le pied de la hauteur issue de C .

Déterminer le réel k tel que $\vec{AH} = k \vec{AB}$ en utilisant le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

En déduire les coordonnées de H .

c) Calculer l'aire de ABC .