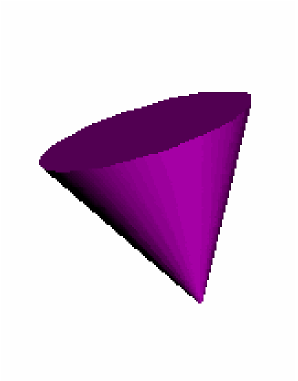
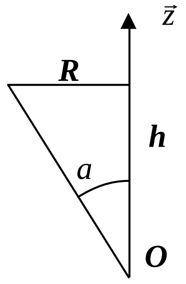
TD N°1 : Centre d'inertie, Aire, Volume

Exercice 1 :

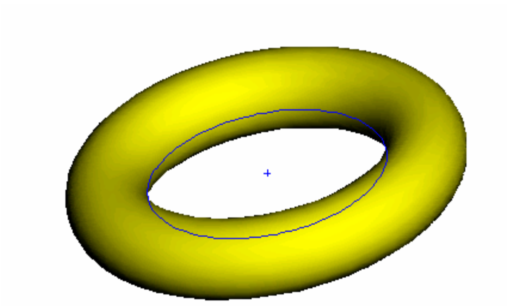
Déterminer la surface et l'aire du cône d'axe $(O;\vec{z})$ dont on a représenté la demi-section ci-dessous :

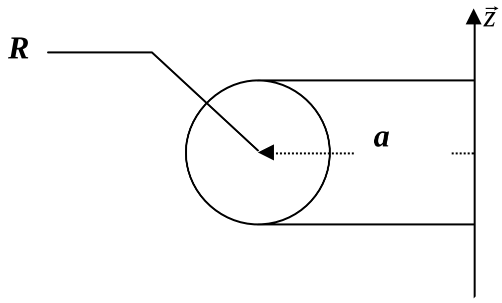




Exercice 2 :

Déterminer la surface et l'aire du tore d'axe $(O;\vec{z})$ dont on a représenté la demi-coupe ci-dessous :

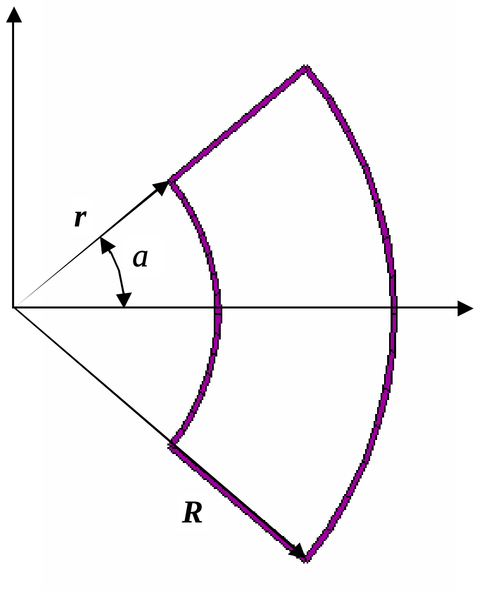




Exercice 3 :

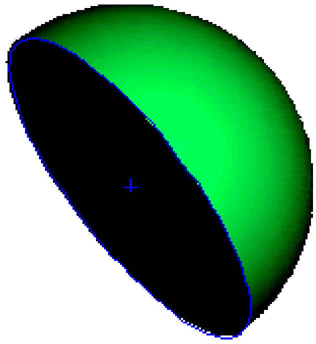
Déterminer la position du centre d'inertie du secteur circulaire homogène représenté ci-dessous. Cette surface représente par exemple la surface de contact entre une plaquette de frein et son disque sur un système de frein à disque de véhicule automobile.

En déduire l'expression de la position du centre d'inertie d'un demi disque de rayon R et d'un demi cercle de rayon R



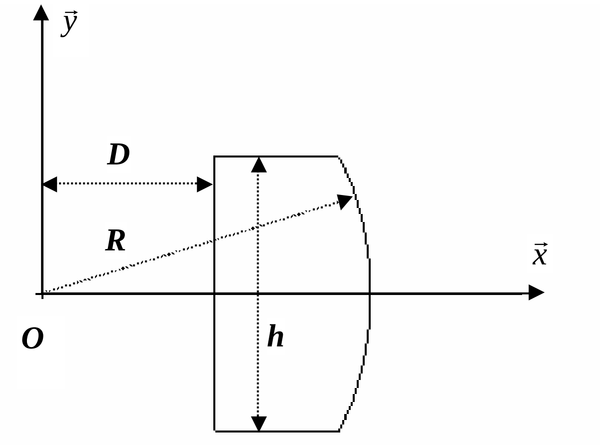
Exercice 4

Déterminer la position du centre de gravité d'une demi-sphère homogène de rayon R

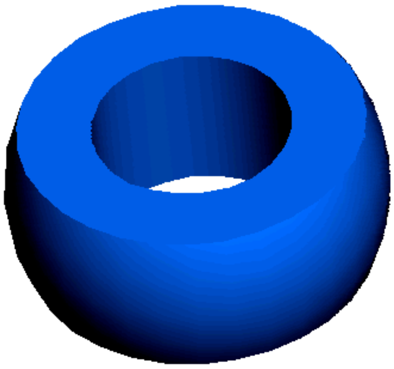


Exercice 5 :(difficile au niveau des calculs)

Déterminer la position du centre de gravité de la surface homogène ci-contre

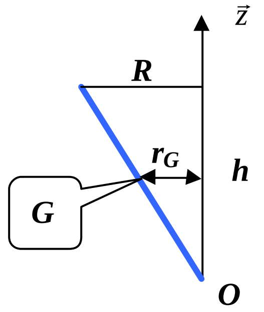


En déduire le volume de la rotule ci-contre dont une section est la surface déterminée au dessus.



TD N°1 : Correction
Centre d'inertie

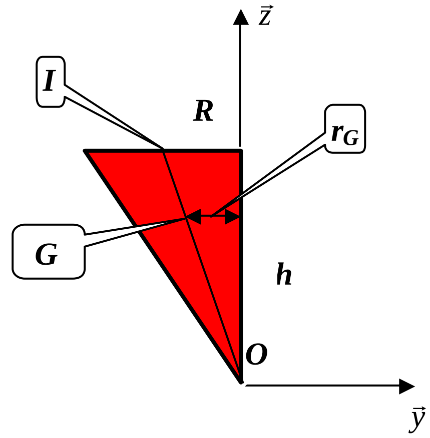
Exercice 1 :



Déterminons l'aire du cône engendrée par la rotation de la ligne bleu de longueur $L=\sqrt{R^2+h^2}$ et de centre d'inertie G au milieu du segment bleu.
Le premier théorème de Guldin nous permet d'écrire que cette surface est égale au produit de la longueur de la ligne par le périmètre du cercle décrit par le centre d'inertie G de cette ligne

On a donc : $S_{cone}=2p\,r_G L$

C'est à dire puisque $r_G=\dfrac{R}{2}$: $\boxed{S_{cone}=p\,R\sqrt{R^2+h^2}}$



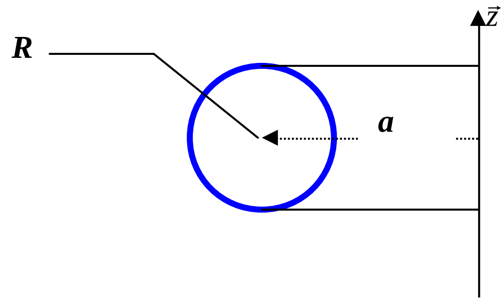
Déterminons le volume du cône engendrée par la rotation de la surface triangulaire rouge d'aire $A=\dfrac{Rh}{2}$ et de centre d'inertie G au $2/3$ des médianes en partant du sommet : $\overrightarrow{OG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OI}$

Le second théorème de Guldin nous permet d'écrire que ce volume est égale au produit de l'aire de cette surface par le périmètre du cercle décrit par le centre d'inertie G de cette ligne

On a donc : $V_{cone}=2p\,r_G A$

Or $\overrightarrow{OG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OI}=\dfrac{2}{3}\begin{vmatrix}0\\-\dfrac{R}{2}\\h\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\-\dfrac{R}{3}\\h\end{vmatrix}\Rightarrow y_G=-\dfrac{R}{3}\Rightarrow r_G=\dfrac{R}{3}$, d'où : $\boxed{V_{cone}=\dfrac{1}{3}p\,R^2h}$

Exercice 2 :

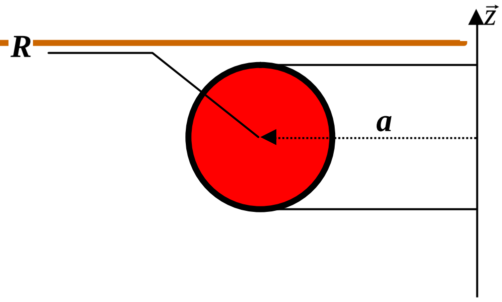


Déterminons l'aire du tore engendrée par la rotation de la ligne bleu de longueur $L=2p\,R$ et de centre d'inertie G au centre du cercle bleu.
Le premier théorème de Guldin nous permet d'écrire que cette surface est égale au produit de la longueur de la ligne par le périmètre du cercle décrit par le centre d'inertie G de cette ligne

On a donc : $S_{tore}=2p\,r_G L$

C'est à dire puisque $r_G=a$: $\boxed{S_{tore}=4p^2aR}$

Déterminons le volume du tore engendré par la rotation de la surface rouge d'aire $A=p\,R^2$ et de centre G au centre de la surface rouge.
Le second théorème de Guldin nous permet d'écrire que ce volume est égal au produit de l'aire de la surface par le périmètre du cercle décrit par le centre d'inertie G de cette surface.



On a donc : $V_{tore} = 2p\, r_G A$

C'est à dire puisque $r_G = a$: $V_{tore} = 2p^2 aR^2$

Exercice 3

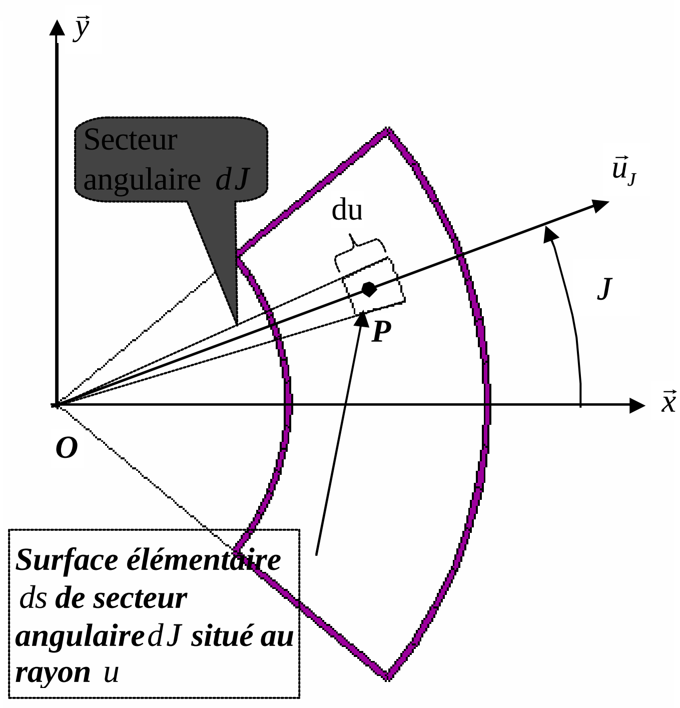
On parcourt la surface circulaire par un point courant P repérer par ses coordonnées polaires $(u; J)$ que l'on fait varier de la façon suivante : $u \in [r; R]$ et $J \in [-a; a]$.

L'expression de la position du centre d'inertie de la plaque circulaire est :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \int_{u=r}^{u=R} \int_{J=-a}^{J=a} \overrightarrow{OP} dm$$

La plaque étant homogène, les masses sont proportionnelles aux surfaces et l'on peut donc écrire : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{S} \int_{u=r}^{u=R} \int_{J=-a}^{J=a} \overrightarrow{OP} ds$

Avec ds la surface élémentaire entourant le point courant P, qui puisqu'elle est infinitésimale, est un rectangle de coté du et de secteur angulaire dJ au rayon u, c'est à dire $ds = u\, du\, dJ$



En projetant la relation $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{S} \int_{u=r}^{u=R} \int_{J=-a}^{J=a} \overrightarrow{OP}\, u\, du\, dJ$ avec $S = p\left(R^2 - r^2\right)$ sur les axes $\vec{x}$ et $\vec{y}$, on obtient les expressions des coordonnées du centre d'inertie G notés : x_G et y_G.

$x_G = \frac{1}{S} \int_{u=r}^{u=R} \int_{J=-a}^{J=a} x_P\, u\, du\, dJ$ et $y_G = \frac{1}{S} \int_{u=r}^{u=R} \int_{J=-a}^{J=a} y_P\, u\, du\, dJ$ avec x_P et y_P, les coordonnées cartésiennes du point courant P.

Or les coordonnées cartésiennes du point P sont : $\begin{cases} x_P = u \cos J \\ y_P = u \sin J \end{cases}$

Cependant, par raison de symétrie de la pièce par rapport à l'axe des abscisses, on voit bien que le centre d'inertie de la surface est sur l'axe des abscisses, c'est à dire que : $y_G = 0$, ce que l'on vérifiera plus tard par calcul.

On a donc : $x_G = \frac{1}{p\left(R^2 - r^2\right)} \int_{u=r}^{u=R} \int_{J=-a}^{J=a} u^2 \cos J\, du\, dJ$

Les deux variables d'intégration étant indépendantes l'une de l'autre, l'intégrale double est en fait le produit des deux intégrales simples, soit :

$$x_G = \frac{1}{p\left(R^2 - r^2\right)} \left[\int_{u=r}^{u=R} u^2\, du\right] \left[\int_{J=-a}^{J=a} \cos J\, dJ\right] = \frac{1}{p\left(R^2 - r^2\right)} \left[\frac{u^3}{3}\right]_r^R \left[\sin J\right]_{-a}^{a}$$

$$x_G = \frac{1}{p\left(R^2 - r^2\right)}\left[\frac{R^3}{3} - \frac{r^3}{3}\right]_r^R \left[\sin a - \sin(-a)\right]$$

$$= \frac{2\left(R^3 - r^3\right)\sin a}{3p\left(R^2 - r^2\right)}$$

$$= \frac{2\left(R - r\right)\left(R^2 + Rr + r^2\right)\sin a}{3p\left(R - r\right)\left(R + r\right)}$$

D'où : $x_G = \dfrac{2\left(R^2 + Rr + r^2\right)\sin a}{3p\left(R + r\right)}$

Vérifions par calcul que $y_G = 0$:

On a donc : $y_G = \dfrac{1}{p\left(R^2 - r^2\right)} \displaystyle\int_{u=r}^{u=R}\int_{J=-a}^{J=a} u^2 \sin J \, du \, dJ$

Les deux variables d'intégration étant indépendantes l'une de l'autre, l'intégrale double est en fait le produit des deux intégrales simples, soit :

$$x_G = \frac{1}{p\left(R^2 - r^2\right)}\left[\int_{u=r}^{u=R} u^2 \, du\right]\left[\int_{J=-a}^{J=a} \sin J \, dJ\right] = \frac{1}{p\left(R^2 - r^2\right)}\left[\frac{u^3}{3}\right]_r^R \left[-\cos J\right]_{-a}^{a}$$

$y_G = \dfrac{1}{p\left(R^2 - r^2\right)}\left[\dfrac{R^3}{3} - \dfrac{r^3}{3}\right]_r^R \underbrace{\left[-\cos a + \cos(-a)\right]}_{0}$; d'où le résultat : $y_G = 0$

Appliquons ce résultat à un demi-cercle de rayon R :

Un demi-cercle de rayon R est une plaque circulaire pour laquelle $a = \dfrac{p}{2}$ et $r = R$.

Il suffit donc d'appliquer la relation trouvée précédemment à ces valeurs. On obtient donc :

$$x_G = \frac{R}{p}$$

Appliquons ce résultat à un demi-disque de rayon R :

Un demi-disque de rayon R est une plaque circulaire pour laquelle $a = \dfrac{p}{2}$ et $r = 0$.

Il suffit donc d'appliquer la relation trouvée précédemment à ces valeurs. On obtient donc :

$$x_G = \frac{2R}{3p}$$

Exercice 4 :

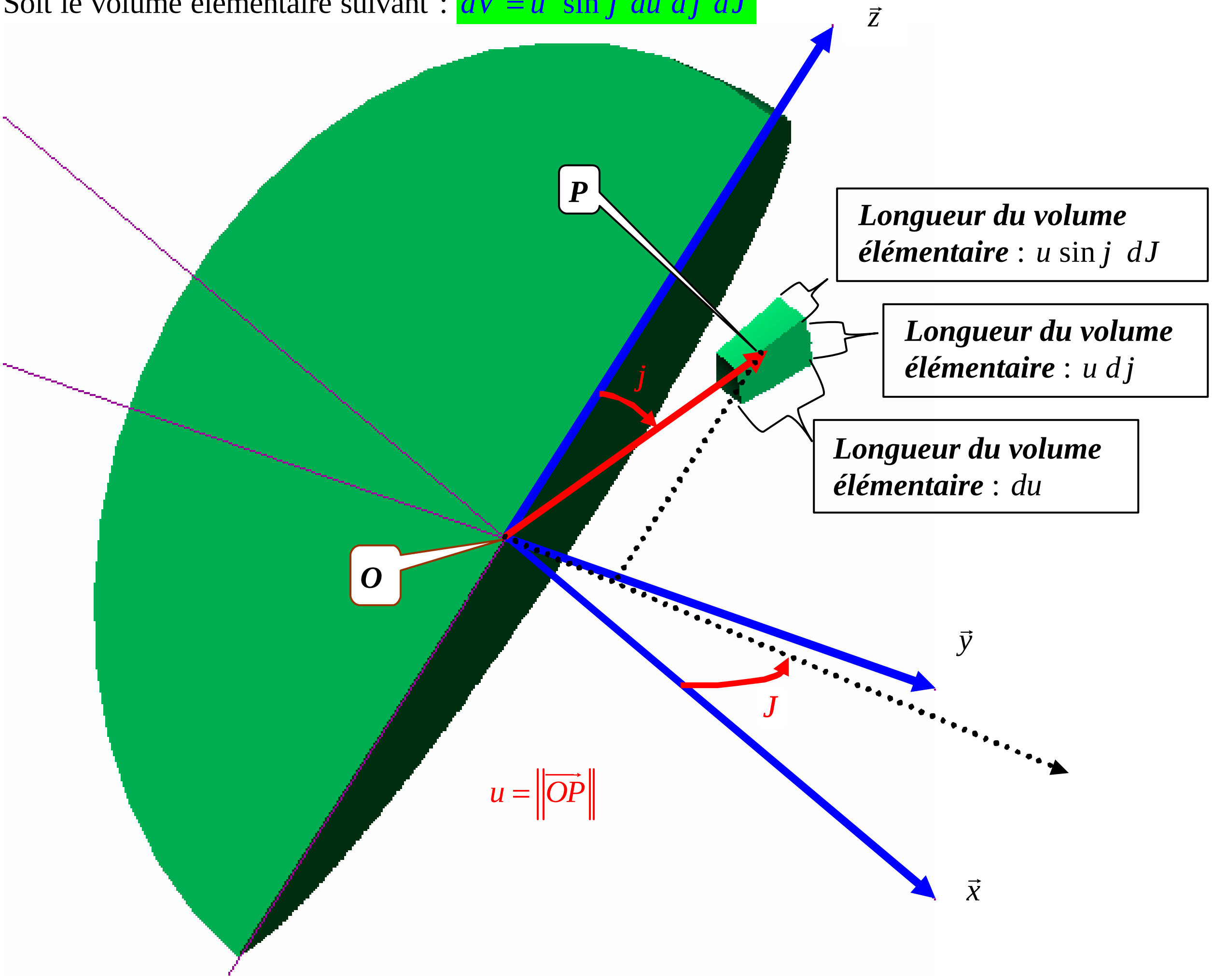
On repère un point courant P de la demi-sphère par ses coordonnées sphériques $(u; J; j)$.

Les coordonnées cartésiennes sont alors égales à : $\begin{cases} x_P = u \sin j \cos J \\ y_P = u \sin j \sin J \\ z_P = u \cos j \end{cases}$

Pour que le point courant P parcourt toute la demi-sphère, il faut que les coordonnées sphériques varient dans les domaines respectifs suivants: $\begin{cases} u \in [0; R] \\ J \in [0; p] \\ j \in [0; p] \end{cases}$

Le volume élémentaire est alors un parallélépipède de coté : du, $u\,dj$ et $u \sin j\, dJ$

Soit le volume élémentaire suivant : $dV = u^2 \sin j \; du \; dj \; dJ$



Par raison de symétrie du volume par rapport aux axes choisis, on s'aperçoit que le centre d'inertie G de la demi-sphère se situe sur l'axe $(O; \vec{y})$. Les coordonnées de G sur les axes $(O; \vec{x})$ et $(O; \vec{z})$ sont donc nulles, ce que l'on démontrera par calcul.

L'expression de la position du centre d'inertie de la demi-sphère est :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \int_{u=0}^{u=R} \int_{J=0}^{J=p} \int_{j=0}^{j=p} \overrightarrow{OP} dm$$

La demi-sphère étant homogène, les masses sont proportionnelles aux volumes et l'on peut donc écrire : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{V} \int_{u=0}^{u=R} \int_{J=0}^{J=p} \int_{j=0}^{j=p} \overrightarrow{OP} dV$

En projetant la relation $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{V}\int_{u=0}^{u=R}\int_{J=0}^{J=p}\int_{j=0}^{j=p} \overrightarrow{OP}\, u^2 \sin j \; du\, dJ\, dj$ avec $V = \frac{2}{3} p R^3$ sur les axes $(O;\vec{x}),(O;\vec{y})$ et $(O;\vec{z})$, on obtient les expressions des coordonnées du centre d'inertie G notés : x_G, y_G et z_G.

$x_G = \frac{1}{V}\int_{u=0}^{u=R}\int_{J=0}^{J=p}\int_{j=0}^{j=p} x_P\, u^2 \sin j \; du\, dJ\, dj$, $y_G = \frac{1}{V}\int_{u=0}^{u=R}\int_{J=0}^{J=p}\int_{j=0}^{j=p} y_P\, u^2 \sin j \; du\, dJ\, dj$ et $z_G = \frac{1}{V}\int_{u=0}^{u=R}\int_{J=0}^{J=p}\int_{j=0}^{j=p} z_P\, u^2 \sin j \; du\, dJ\, dj$ avec x_P, y_P et z_P, les coordonnées cartésiennes du point courant P.

En exprimant les coordonnées cartésiennes de P rappelées précédemment et en remarquant que les trois variables d'intégration (les trois coordonnées sphériques) sont indépendantes (c'est à dire que ***les intégrales triples sont égales au produit des trois intégrales***), on obtient :

- $x_G = \frac{3}{2p R^3}\int_{u=0}^{u=R} u^3 du \int_{J=0}^{J=p} \cos J \; dJ \int_{j=0}^{j=p} \sin^2 j \; dj$ or $\int_{J=0}^{J=p} \cos J \; dJ = \left[\sin J\right]_0^p = 0$, donc $x_G = 0$
- $z_G = \frac{3}{2p R^3}\int_{u=0}^{u=R} u^3 du \int_{J=0}^{J=p} dJ \int_{j=0}^{j=p} \underbrace{\cos j \, \sin j}_{\frac{1}{2}\sin(2j)} \; dj$ or

  $\int_{J=0}^{J=p} \frac{1}{2}\sin(2j)\, dj = -\frac{1}{4}\left[\cos(2j)\right]_0^p = 0$, donc $z_G = 0$
- $y_G = \frac{3}{2p R^3}\int_{u=0}^{u=R} u^3 du \int_{J=0}^{J=p} \sin J \; dJ \int_{j=0}^{j=p} \sin^2 j \; dj$

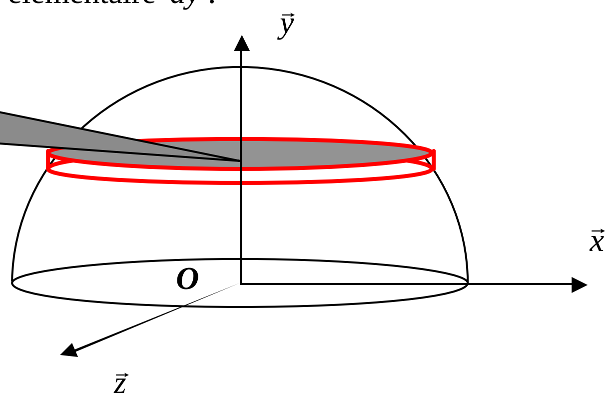
  $y_G = \frac{3}{2p R^3}\left[\frac{u^4}{4}\right]_0^R \left[-\cos J\right]_0^p \int_{j=0}^{j=p}\left(\frac{1-\cos(2j)}{2}\right) dj$

  $y_G = \frac{3}{2p R^3}\left[\frac{u^4}{4}\right]_0^R \left[-\cos J\right]_0^p \left[\frac{j}{2} - \frac{1}{4}\sin(2j)\right]_0^p$, soit : $y_G = \frac{3}{2p R^3}\frac{R^4}{4}(2)\left(\frac{p}{2}\right)$, doù :

  $y_G = \frac{3R}{8}$

__Autre méthode :__ On peut parcourir tout la demi-sphère en « empilant » des disques de rayon variable en fonction de y et d'épaisseur élémentaire dy.

M $(0;y;0)$ ***centre d'inertie du disque élémentaire de rayon r(y), d'épaisseur dy***



$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{V}\int_{y=0}^{y=R} \overrightarrow{OM}\; dV$

Soit, sur la seule coordonnées non nulle de G : $y_G = \frac{3}{2p R^3}\int_{y=0}^{y=R} \underbrace{y_M}_{y}\, p\left[r(y)\right]^2 \, dy$

Il faut donc déterminer la fonction r(y) avant de pouvoir intégrer.

L'équation du cercle contenu dans le plan $(O;\vec{x};\vec{y})$ est $x^2+y^2=R^2$, or r(y) est la coordonnées suivant $\vec{x}$ d'un point décrivant ce cercle. D'où : $r(y)=\sqrt{R^2-y^2}$.
On peut donc reprendre le calcul de la position du centre d'inertie de notre demi-sphère :

$$y_G=\frac{3}{2p\,R^3}\int_{y=0}^{y=R} yp\left[R^2-y^2\right]dy$$

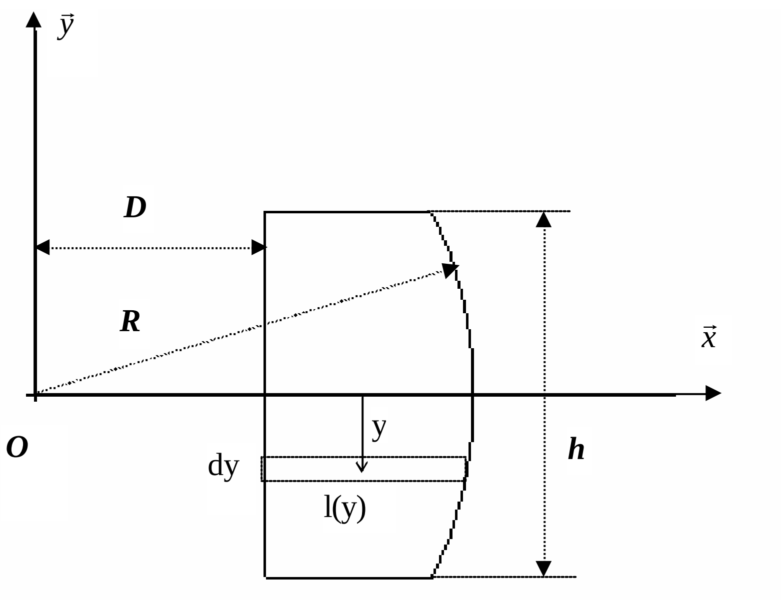
$$y_G=\frac{3}{2R^3}\int_{y=0}^{y=R}\left(yR^2-y^3\right)dy$$

$$y_G=\frac{3}{2R^3}\left[\frac{y^2R^2}{2}-\frac{y^4}{4}\right]_0^R$$

$y_G=\frac{3}{2R^3}\frac{R^4}{4}$. On retrouve donc bien le même résultat, c'est à dire : $y_G=\frac{3R}{8}$

Exercice 5

On choisi comme élément d'intégration, un rectangle situé à l'ordonnée y, de hauteur, dy et de longueur variable l(y).
Le centre d'inertie P de cet élément est donc à la position :
$\overrightarrow{OP}=\left(D+\frac{l(y)}{2}\right)\vec{x}+y\vec{y}$.
Avant d'intégrer pour obtenir la position du centre d'inertie de la surface, il nous reste donc à déterminer la fonction l(y).



Remarque : Ce type d'intégration peut bien sûr s'appliquer à d'autre surface, pour lesquelles la fonction l(y) serait différente.

Calcul de la fonction l(y) :
La longueur l(y) est la distance entre la droite verticale d'équation $x=D$ et le cercle de centre O et de rayon R, d'équation : $x^2+y^2=R^2$, soit pour la partie qui nous intéresse $x=\sqrt{R^2-y^2}$. On a donc la relation suivante : $l(y)=\sqrt{R^2-y^2}-D$

Calcul de la position du centre d'inertie G de la surface :

On part de la relation général : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}\int \overrightarrow{OP}\, dm$ qui, puisque le solide est par hypothèse homogène, peut s'écrire : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{S}\int_{y=-\frac{h}{2}}^{y=\frac{h}{2}} \overrightarrow{OP}\, ds$ avec $ds = l(y)\, dy$.

Calcul de S (surface globale) :

$$S = \int_{y=-\frac{h}{2}}^{y=\frac{h}{2}} ds = \int_{y=-\frac{h}{2}}^{y=\frac{h}{2}} l(y)dy = \int_{y=-\frac{h}{2}}^{y=\frac{h}{2}} \left[\sqrt{R^2-y^2} - D\right]dy = \left[\frac{1}{2}\left[y\sqrt{R^2-y^2} + R^2 \arcsin\left(\frac{y}{R}\right)\right] - Dy\right]_{y=-\frac{h}{2}}^{y=\frac{h}{2}}$$

$$S = \frac{h}{2}\sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}} + R^2 \arcsin\left(\frac{h}{2R}\right) - Dh$$

On peut donc reprendre le calcul de la position du centre d'inertie G :
Par raison de symétrie, on cherche en fait la seule coordonnée sur l'axe $\vec{x}$ du centre d'inertie, puisque celle sur $\vec{y}$ doit être nulle :

$x_G = \frac{1}{S}\int_{y=-\frac{h}{2}}^{y=\frac{h}{2}} x_P\, ds$. Soit le calcul suivant :

$$x_G = \frac{1}{\frac{h}{2}\sqrt{R^2-\frac{h^2}{4}} + R^2\arcsin\left(\frac{h}{2R}\right) - Dh}\int_{y=-\frac{h}{2}}^{y=\frac{h}{2}}\left[\frac{D}{2} + \frac{\sqrt{R^2-y^2}}{2}\right]\left[\sqrt{R^2-y^2} - D\right]dy$$

$$x_G = \frac{1}{\frac{h}{2}\sqrt{R^2-\frac{h^2}{4}} + R^2\arcsin\left(\frac{h}{2R}\right) - Dh}\int_{y=-\frac{h}{2}}^{y=\frac{h}{2}}\frac{1}{2}\left[R^2 - y^2 - D^2\right]dy$$

$$x_G = \frac{1}{\frac{h}{2}\sqrt{R^2-\frac{h^2}{4}} + R^2\arcsin\left(\frac{h}{2R}\right) - Dh}\,\frac{1}{2}\left[\left(R^2-D^2\right)y - \frac{1}{3}y^3\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$$

$$x_G = \frac{\left[\frac{\left(R^2-D^2\right)h}{2} - \frac{h^3}{24}\right]}{\frac{h}{2}\sqrt{R^2-\frac{h^2}{4}} + R^2\arcsin\left(\frac{h}{2R}\right) - Dh}$$

Déterminons le volume de la rotule :

Il suffit d'appliquer le second théorème de Guldin :

$V_{rotule} = 2p\, x_G S$.

D'où : $V_{rotule} = p\left[\left(R^2-D^2\right)h - \frac{h^3}{12}\right]$

Remarque : On retrouve bien le volume d'une sphère $\frac{4}{3}p\, R^3$ **pour** $\begin{cases} D = 0 \\ h = 2R \end{cases}$