EXERCICE 1
$2009 = 11 \times 182 + 7$ donc $2009 \equiv 7\ (11)$
Le reste de la division euclidienne de 2009 par 11 est 7

$2^4 = 16 = 11 + 5$ donc $2^4 \equiv 5\ (11)$
$2^8 \equiv 5^2\ (11)$ or $25 = 2 \times 11 + 3$ donc $2^8 \equiv 3\ (11)$
$2^{10} \equiv 3 \times 2^2\ (11)$ or $12 = 11 + 1$ donc $2^{10} \equiv 1\ (11)$
Le reste de la division euclidienne de 2^{10} par 11 est 1

$2^{2009} = 2^{2000} \times 2^9$ donc $2^{2009} \equiv 2^9\ (11)$
$2^9 \equiv 3 \times 2\ (11)$ donc $2^{2009} \equiv 6\ (11)$
$2^{2009} + 2009 \equiv 6 + 7\ (11)$
or $13 = 11 + 2$ donc $2^{2009} + 2009 \equiv 2\ (11)$
Le reste de la division euclidienne de $2^{2009} + 2009$ par 11 est 2

EXERCICE 2
$2a + b = 6$ donc tout diviseur commun à a et b est un diviseur de $2a + b$ donc un diviseur de 6
Les diviseurs communs à a et b sont 1 ; 2 ; 3 et 6.

EXERCICE 3
n divise $n + 8$ si et seulement si n divise $(n + 8) - 8$ donc n est égal à 1 ; 2 ; 4 ou 8.

EXERCICE 4
$6u + 9v = 3(2u + 3v)$ or 3 ne divise pas 1 donc on ne peut pas avoir $3(2u + 3v) = 1$ donc pas avoir $6u + 9v = 1$

EXERCICE 5
1 $n^2 + 5n + 4 = (n + 1)(n + 4)$
$n + 4$ appartient à $\mathbb{N}$ donc $n + 1$ divise $n^2 + 5n + 4$

$n^2 + 3n + 2 = (n + 1)(n + 2)$
$n + 2$ appartient à $\mathbb{N}$ donc $n + 1$ divise $n^2 + 3n + 2$

2. $3n^2 + 15n + 19 = 3n(n + 1) + 12(n + 1) + 7$
$3n^2 + 15n + 19 = (n + 1)(3n + 12) + 7$
$n + 1$ divise $3n^2 + 15n + 19$ donc divise $3n^2 + 15n + 19 - (n + 1)(3n + 12)$ donc $n + 1$ divise 7
$n \in \mathbb{N}$ donc $n = 1$ ou 7

3. Si $3n^2 + 15n + 19$ est divisible par $n^2 + 3n + 2$
alors $3n^2 + 15n + 19$ est divisible par $n + 1$ donc si $n = 1$ ou 7
Si $n = 1$, $3n^2 + 15n + 19 = 37$ et $n^2 + 3n + 2 = 6$ donc $3n^2 + 15n + 19$ n'est pas divisible par $n^2 + 3n + 2$ quand $n = 1$

Si $n = 7$, $3n^2 + 15n + 19 = 271$ et $n^2 + 3n + 2 = 72$
or 271 n'est pas divisible par 72 donc $3n^2 + 15n + 19$ n'est pas divisible par $n^2 + 3n + 2$ quand $n = 7$

EXERCICE 6
$a + b = 416$ et $a = 4b + 61$ donc $5b + 61 = 416$ soit $b = 71$ et $a = 345$

EXERCICE 7
$a - b = 538$ et $a = 13b + 34$ donc $12b + 34 = 538$ soit $b = 42$ et $a = 580$

$a + b = 2096$ et $a = 5b + 206$ donc $6b + 206 = 2096$ donc $b = 315$ et $a = 1781$

EXERCICE 8
1. $12 \equiv -1\ (13)$ donc $12^2 \equiv 1\ (13)$

2. $12^{2k} \equiv 1\ (13)$ donc $12^{2k+1} \equiv -1\ (13)$ donc $1 + 12^{2k+1} \equiv 0\ (13)$
Pour tout entier naturel k, 13 divise $1 + 12^{2k+1}$

3. $10 \equiv 3\ (7)$ donc $12^2 \equiv 2\ (7)$ et $10^3 \equiv -1\ (7)$ soit $10^6 \equiv 1\ (13)$
$10^{6k} \equiv 1\ (13)$ donc $10^{6k+4} \equiv 2^2\ (7)$ donc $10^{6k+4} + 3 \equiv 0\ (7)$
Pour tout entier naturel k, 7 divise $10^{6k+4} + 3$