Intégration d'une inégalité

Considérons l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{1+x^3}$

On ne peut calculer directement l'intégrale I, car on ne connaît pas de primitive de la fonction f. On se propose ici de donner un <u>encadrement de I.</u>

Montrons que pour tout $x \in [0;1]$: $\frac{1}{2}x \leq f(x) \leq x$

$$0 \leq x \leq 1 \iff 0 \leq x^3 \leq 1$$

la fonction cube étant croissante sur [0 ; 1]

$$\iff 1 \leq 1+x^3 \leq 2$$

$$\iff \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^3} \leq 1$$

la fonction inverse étant décroissante sur [1 ; 2]

$$\iff \frac{1}{2}x \leq \frac{x}{1+x^3} \leq x$$

on a multiplié par x qui est positif sur [0 ; 1]

Par conséquent, pour tout $x \in [0;1]$: $\frac{1}{2}x \leq f(x) \leq x$

L'inégalité étant vraie sur [0 ; 1], on pourra l'intégrer sur cet intervalle

D'où : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2}x\,dx \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq \int_0^1 x\,dx$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^1 \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

avec $[G(x)]_a^b = G(b) - G(a)$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq I \leq \frac{1}{2}$$