Complexes et géométrie

On considère les points A , B , C , et D deux à deux distincts ,
d'affixes respectives a , b , c et d .

Comment démontrer que des vecteurs sont égaux :

méthode :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{CD}} \Leftrightarrow b - a = d - c$$

le vecteur $\overrightarrow{AB}$ ayant pour affixe $b - a$

Comment calculer une distance :

méthode : On calcule le module de $b - a$: AB = $|b - a|$

Comment calculer une mesure d'angle :

méthode : Pour déterminer une mesure de $\left(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}\right)$, il faut calculer l'argument de $\dfrac{c-a}{b-a}$:

$$arg\ \frac{c-a}{b-a} = \left(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}\right) \quad [2\pi]$$

Comment interpréter géométriquement le complexe $\dfrac{d-c}{b-a}$:

Une fois que l'on a calculé et simplifié le quotient $\dfrac{d-c}{b-a}$, on pourra préciser :

→ soit son module
si on veut déterminer des distances :

$$\left|\frac{d-c}{b-a}\right| = \frac{|d-c|}{|b-a|} = \frac{CD}{AB}$$

→ soit son argument
si on veut déterminer des angles :

$$arg\ \frac{d-c}{b-a} = \left(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{CD}\right) \quad [2\pi]$$

<u>Cas particulier</u> : $arg\,(b - a) = \left(\vec{u} \,;\, \overrightarrow{AB}\right)$

On sera alors amené à étudier l'une des situations suivantes :

- ***Situation 1 : démontrer un alignement***

Si $\dfrac{c-a}{b-a}$ est réel non nul alors $arg\ \dfrac{c-a}{b-a} = 0\ [\pi]$

$\Rightarrow\ \left(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{AC}\right) = 0\ [\pi]$
$\Rightarrow\ \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires
$\Rightarrow\ A$, B et C alignés

- ***Situation 2 : démontrer que des droites sont perpendiculaires***

Si $\dfrac{c-a}{b-a}$ est imaginaire pur alors $arg\ \dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

$\Rightarrow\ \left(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$
$\Rightarrow\ (AB) \perp (AC)$

- ***Situation 3 : démontrer qu'un triangle est équilatéral***

$$ABC \text{ équilatéral} \Leftrightarrow \begin{cases} \arg \dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{\pi}{3} \quad ou \quad -\dfrac{\pi}{3} \\ |c-a| = |b-a| \end{cases}$$

Comment trouver un lieu de points :

Chercher un lieu de points , c'est chercher un ensemble de points qui vérifie une égalité particulière . On peut être amené à rencontrer les situations suivantes :

♣ $|z-a| = |z-b|$ ⇦ signifie que $MA = MB$ et donc que M est sur la médiatrice de $[AB]$.

♣ $|z-a| = r$ ⇦ signifie que $AM = r$ et donc que M est sur le cercle de centre A et de rayon r .

♣ $arg\,(z-a) = \alpha\ [2\pi]$ **:** ce qui signifie que $\left(\vec{u}\ ;\overrightarrow{AM}\right) = \alpha\ [2\pi]$ et donc que M est sur la demi-droite $\left(A;\vec{n}\right)$ telle que $\left(\vec{u};\vec{n}\right) = \alpha\ [2\pi]$.